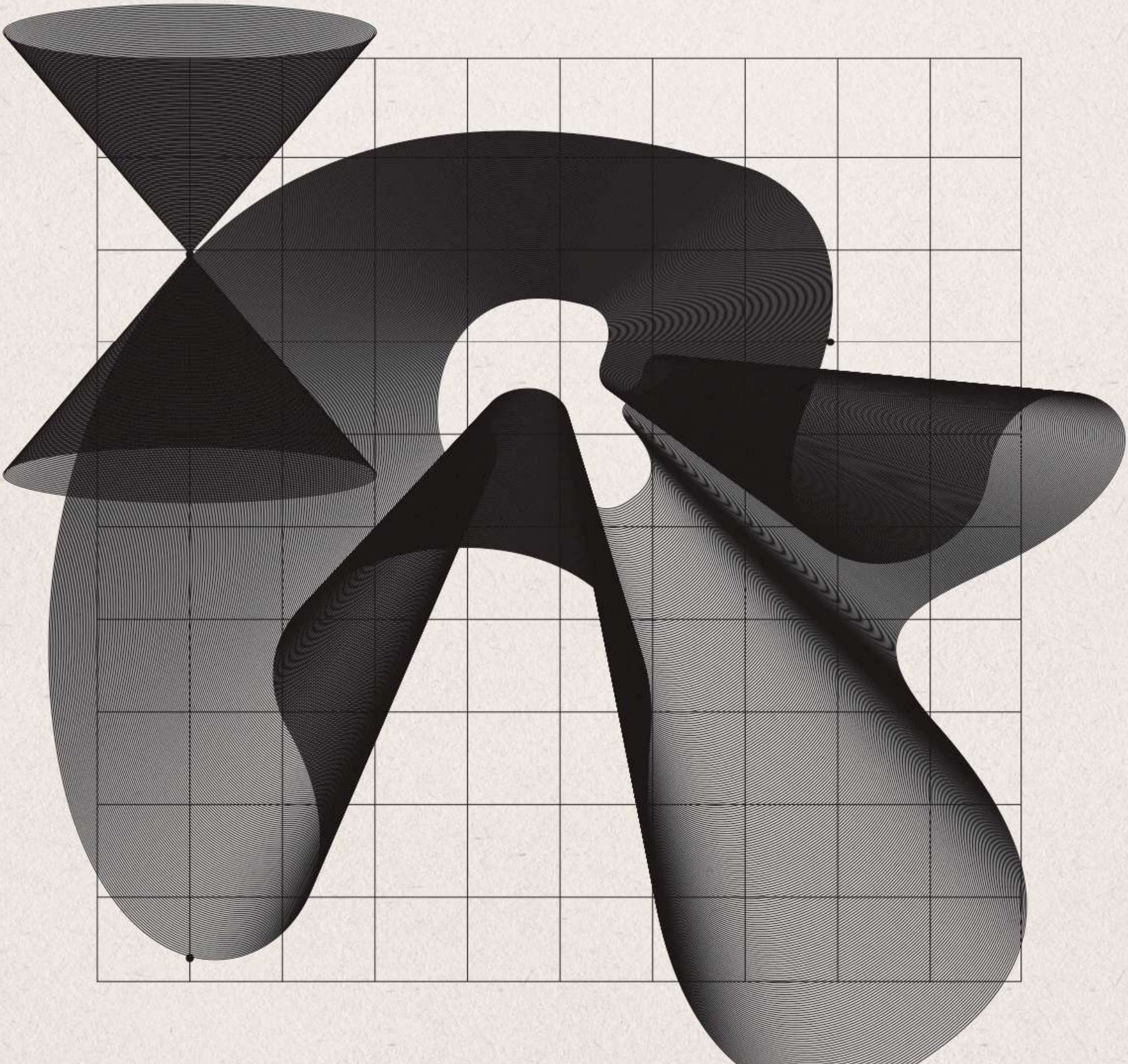
GRUPO FUNDAMENTAL

Aplicaciones y CW complejos

Mentor: Sergio Chaves

Estudiante: Yuhad Olarte I.



GRUPO FUNDAMENTAL, APLICACIONES Y CW COMPLEJOS.

MENTOR: SERGIO CHAVES
YUHAD OLARTE IBRAHIM

Tabla de contenidos.

Prefacio

Estas notas hacen parte de un proyecto de lectura dirigida llamado *Pares Ordenados* bajo la supervición del profesor **Sergio Chaves**. Como objetivo se fijó estudiar conceptos básicos de la topología algebraica como lo son las homotopías, el grupo fundamental y sus aplicaciones. Se introducen los CW complejos y la influencia del grupo fundamental ante dichos espacios. Agradezco profundamente al profesor *Sergio Chaves* por su apoyo a lo largo de todo el proyecto.

1. Grupo fundamental

1.1. **Preliminares.** A través de todo el documento se denotan,

- I como el intervalo cerrado $[0, 1]$.
- Las mayúsculas $X, Y, ...$ como espacios topológicos.
- (X, x_0) al espacio topológico X donde $x_0 \in X$. Al par (X, x_0) se le llama espacio punteado y al punto x_0 se le llama punto base.
- $C(X, Y)$ al espacio de funciones continuas de X a Y.

1.2. **Homotopías, caminos y grupo fundamental.**

Definición 1.2.1. Sean X, Y espacios topológicos, y sean $f, g\colon X \to Y$ funciones continuas. Una homotopía de f a g es una función continua $H\colon X \times I \to Y$ tal que,

$$H(x, 0) = f(x), \qquad H(x, 1) = g(x).$$

Si existe una homotopía de f a g se dice que dos funciones f, g son homotópicas o homótopas y se escribe $f \simeq g$

Para cada $t \in I$, la homotopía H define una función continua $H_t\colon X \to Y$ tal que $H_t(x) = H(x, t)$, así H puede ser descrita como una familia de funciones continuas H_t parametrizadas por t donde $H_0 = f$ y $H_1 = g$.

Ejemplo 1.2.2. Sean $f, g\colon X \to Y$ funciones continuas, donde X es un espacio topológico cualquiera y $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. Si para todo $x \in X$ se cumple que las imágenes de $f(x)$ y $g(x)$ pueden ser unidas por un segmento de recta contenido en Y, entonces $f \simeq g$ a través de la homotopía $H\colon X \times I \to Y$ definida como $H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$. A esta relación homotópica se le llama homotopía lineal.

Ejemplo 1.2.3. Sean $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuyas asignaciones son,

$$f(x) = (x, x^2), \qquad g(x) = (x, x),$$

la función $H(x, t) = (x, x^2 - tx^2 + tx)$ es una homotopía de f a g.

Proposición 1.2.4. La relación de homotopía, $\simeq$ es una relación de equivalencia en $C\,(X, Y)$. A las clases de dicha relación se les denota como $[f]$ donde $f \in C(X, Y)$. $[f]$ es la clase de homotopía de f.

Definición 1.2.5. Sea X un espacio topológico. Una función continua $\gamma\colon I \to X$ es llamado camino en X. Los puntos iniciales y finales corresponden a $\gamma(0)$ y $\gamma(1)$ respectivamente. Si $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in X$ se dice que γ es un lazo o camino cerrado.

Sean $x, y \in X$ puntos de un espacio topológico X. Al conjunto de caminos cuyos puntos inicial y final son x y y respectivamente se denotan como $\mathcal{P}\,(X, x, y)$. El conjunto de lazos se denota como $\Omega\,(X, x) = \mathcal{P}\,(X, x, x)$.

Definición 1.2.6. Sea X un espacio topológico, y sean dos caminos $\gamma, \delta \in \mathcal{P}\,(X, x, y)$. Una homotopía de caminos γ, δ es una función continua $H\colon I \times I \to X$ tal que,

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \gamma(x), & H(t, 1) &= \delta(x) \\ H(0, s) &= x, & H(1, s) &= y. \end{aligned}$$

Similar al caso de funciones, si existe una homotopía de caminos de γ a δ se dice que dos caminos γ, δ son homotópicos o homótopos y se escribe $\gamma \simeq_p \delta$.

La p bajo el símbolo de equivalencia es para la distinción entre el caso de funciones y caminos, puesto que en inglés camino traduce como *path*.

Proposición 1.2.7. La relacion de homotopía de caminos, $\simeq_p$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}\,(X, x, y)$.

Definición 1.2.8. Se define el grupo fundamental de un espacio topológico (X, x_0) con punto base x denotado como $\pi_1\,(X, x)$ al conjunto,

$$\pi_1\,(X, x) = \Omega\,(X, x) \,/ \simeq .$$

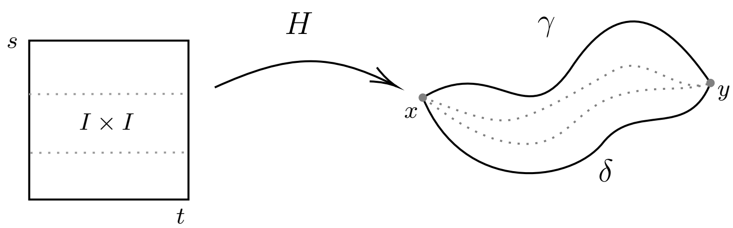


Figure 1. Homotopía entre γ y δ

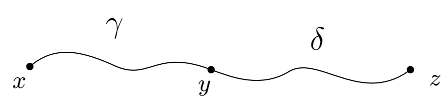
Según lo anterior, el grupo fundamental es el conjunto de todas clases de equivalencia bajo la relación de homotopías de los lazos o caminos cerrados en x_0. Este conjunto como su nombre lo indica tendrá una estructura de grupo, para ello debe definirse el producto adecuadamente y verificar los axiomas de dicha estructura. Motivando la siguiente definición.

Definición 1.2.9. Sea X un espacio topológico con $x, y, z \in X$. Sean $\gamma \in \mathcal{P}(X, x, y)$ y $\delta \in \mathcal{P}(X, y, z)$, se define la concatenación o producto de γ y δ denotado como $\gamma * \delta$ como,

$$\mathcal{P}(X, x, y) \times \mathcal{P}(X, y, z) \xrightarrow{*} \mathcal{P}(X, x, z)$$

$$(\gamma * \delta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \delta(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Visualmente,



Note que γ y δ tienen la particularidad que $\gamma(1) = \delta(0) = y$, es decir, un camino empieza donde termina el otro. A muy grosso modo el producto de caminos consta en poner un camino contigo al otro duplicando los tiempos de cada parte del recorrido.

Proposición 1.2.10. Sea X un espacio topológico con $x, y, z \in X$. Sean $\gamma, \gamma' \in \mathcal{P}(X, x, y)$ y $\delta, \delta' \in \mathcal{P}(X, y, z)$ tal que $\gamma \simeq \gamma'$ y $\delta \simeq \delta'$. Entonces $\gamma * \delta \simeq \gamma' * \delta'$.

La proposición anterior permite inducir una operación binaria sobre $\pi_1(X, x_0)$ bajo la definición,

$$[\gamma] \cdot [\delta] := [\gamma * \delta],$$

donde $\gamma, \delta \in \Omega(X, x_0)$. Se definen, $\overline{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ el camino inverso de γ y $e_p(t) = p$ camino constante $p \in X$.

Proposición 1.2.11. Sea X un espacio topológico, $\gamma \in \mathcal{P}(X, x, y)$ un camino. Una reparametrización de γ es la composición $\gamma \circ \varphi$ donde $\varphi \colon I \to I$ es una función continua tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$.

Note que, $\gamma \circ \varphi \simeq_p \gamma$ vía la homotopía $H(t, s) = \gamma((1-s)t + s\varphi(t))$.

Lema 1.2.12. Sea X un espacio topológico con $x, y, z, w \in X$. Sean $\gamma \in \mathcal{P}(X, x, y), \delta \in \mathcal{P}(X, y, z)$ y $\eta \in \mathcal{P}(X, z, w)$. El producto de caminos satisface las siguientes propiedades,

- $[e_x] \cdot [\gamma] = [\gamma] \cdot [e_y] = [\gamma]$.
- $[\gamma] \cdot [\overline{\gamma}] = [e_x]$ y $[\overline{\gamma}] \cdot [\gamma] = [e_y]$.

- $[\gamma] \cdot ([\delta] \cdot [\eta]) = ([\gamma] \cdot [\delta]) \cdot [\eta]$.

Teorema 1.2.13. $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ es un grupo.

Se dice que el grupo fundamental de un espacio topológico X con punto base $x_0 \in X$ es trivial si, para todo camino $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, $[\gamma] = [e_{x_0}]$.

Ejemplo 1.2.14. Para cualquier subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, $\pi_1(X, x_0)$ es trivial. En efecto, sean $V \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. Para cualesquiera dos caminos en V estos son homotópicos a traves de la homotopía lineal, luego para todo camino $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, $e_{x_0} \simeq_p \gamma$, es decir, $[\gamma] = [e_{x_0}]$.

Definición 1.2.15. Un espacio topológico X es simplemente conexo si es conexo por caminos y además su grupo fundamental es trivial para cualquier punto base $x_0 \in X$.

Ejemplo 1.2.16. Las esferas punteadas, $S^n \setminus \{q\}$ son simplemente conexas.

Definición 1.2.17. Sea G un espacio topológico. Si adicionalmente G tiene estructura de grupo tal que la función producto μ y la función inversa i definidas como,

$$\begin{aligned} \mu\colon G \times G &\to G & \qquad i\colon G &\to G \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y, & x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

son continuas, entonces se dice que G es un grupo topólogico.

Sea que G es un grupo topológico cuya identidad está denotada por 1_G. Considere $\gamma, \delta \in \Omega(G, 1_G)$, se define el producto en $\pi_1(G, 1_G)$ como,

$$[\gamma] \otimes [\delta] := [\gamma \otimes \delta]$$

donde $(\gamma \otimes \delta)(t) := \gamma(t) \cdot \delta(t)$, este ultimo producto es en G.

La buena definición del producto anterior se debe a que si $\gamma, \delta, \gamma', \delta' \in \Omega(G, 1_G)$ son tales que $\gamma \simeq \gamma'$ y $\delta \simeq \delta'$ entonces $\gamma \otimes \delta \simeq \gamma' \otimes \delta'$, es decir, si $[\gamma] = [\gamma']$ y $[\delta] = [\delta']$ luego $[\gamma] \otimes [\delta] = [\gamma'] \otimes [\delta']$. Para ello, sea F una homotopía de caminos entre γ y γ', y W una homotopía de caminos entre δ y δ'. Considere el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} I \times I \arrow[r, "F \times W"] \arrow[dr, "H"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ & G \end{tikzcd}$$

donde la composición $H(t, s) = \mu(F, W) = F(t, s) \cdot W(t, s)$ es una homotopía entre $\gamma \otimes \delta$ y $\gamma' \otimes \delta'$.

En lo que sigue G es un grupo topológico y $\pi_1(G, 1_G)$ es su grupo fundamental basado en 1_G.

Proposición 1.2.18. Sea G un grupo topológico, con 1_G como punto base. Las operaciones $*$ y $\otimes$ definidas en $\pi_1(G, 1_G)$ son las mismas operaciones. Es decir, si $\gamma, \delta \in \Omega(G, 1_G)$ entonces $[\gamma] * [\delta] = [\gamma] \otimes [\delta]$.

Demostración. Note primero que $(\gamma * e_{1_G}) \otimes (e_{1_G} * \delta) = \gamma * \delta$. En efecto, la parte izquierda de la igualdad corresponde precisamente a,

$$(\gamma * e_{1_G})(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 1_G & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \otimes \ (e_{1_G} * \delta)(t) = \begin{cases} 1_G & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \delta(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es decir,

$$(\gamma * e_{1_G})(t) \otimes (e_{1_G} * \delta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \delta(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} = (\gamma * \delta)(t).$$

Finalmente,

$$[\gamma] * [\delta] = [\gamma * \delta] = [(\gamma * e_{1_G}) \otimes (e_{1_G})] = [\gamma * e_{1_G}] \otimes [e_{1_G} * \delta] = [\gamma] \otimes [\delta].$$

□

Proposición 1.2.19. $\pi_1(G, 1_G)$ es abeliano.

Demostración. Sean $\gamma, \delta \in \Omega(G, 1_G)$,

$$\begin{aligned} [\gamma \otimes \delta] = [\gamma * \delta] &= [(\gamma * e_{1_G}) \otimes (e_{1_G} * \delta)] = [\gamma * e_{1_G}] \otimes [e_{1_G} * \delta] \\ &= [e_{1_G} * \gamma] \otimes [\delta * e_{1_G}], \end{aligned}$$

esta ultima igualdad corresponde precisamente a,

$$(e_{1_G} * \gamma)(t) = \begin{cases} 1_G & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \otimes \ (\delta * e_{1_G})(t) = \begin{cases} \delta(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 1_G & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

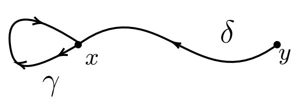
es decir,

$$(e_{1_G} * \gamma) \otimes (\delta * e_{1_G})(t) = \begin{cases} \delta(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} = (\delta * \gamma)(t)$$

□

1.3. **Independencia del punto base.** Sea X un espacio topológico con $x, y \in X$. Considere $\pi_1(X, x)$ su grupo fundamental. Si $x \neq y$ ¿Qué relación tiene $\pi_1(X, x)$ con $\pi_1(X, y)$?

Motivados por lo anterior considere X espacio topológico conexo por caminos, es decir, para todo $x, y \in X$ existe un camino δ tal que $\delta(0) = x$ y $\delta(1) = y$. Si $\gamma \in \Omega(X, x_0)$ entonces $\overline{\delta} * \gamma * \delta \in \Omega(X, y_0)$ como se observa en la siguiente figura,



Proposición 1.3.1. Sea X un espacio topológico conexo por caminos con $x, y \in X$. Sea $\delta \in \mathcal{P}(X, x, y)$. La función $\delta_\#\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y_0)$ cuya asignación,

$$\begin{aligned} \delta_\#\colon \pi_1(X, x) &\to \pi_1(X, y) \\ [\gamma] &\mapsto [\overline{\delta} * \gamma * \delta] \end{aligned}$$

es un isomorfismo. Es decir, si X es conexo por caminos, $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$.

Considere $\overline{\delta}_\#$ el morfismo inverso de $\delta_\#$.

Proposición 1.3.2. Algunas propiedades y resultados de $\delta_\#$.

- $\delta_\#$ es un homomorfismo de grupos.
- Si $\delta \in \mathcal{P}(X, x, y)$ y $\eta \in \mathcal{P}(X, y, z)$, entonces $(\delta * \eta)_\# = \eta_\# \circ \delta_\#$. Lo anterior indica que el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x) \arrow[r, "\delta_\#"] \arrow[dr, "(\delta*\eta)_\#"'] & \pi_1(X,y) \arrow[d, "\eta_\#"] \\
& \pi_1(X,z)
\end{tikzcd}$$

- Si $\delta, \eta \in \mathcal{P}(X, x_0, y_0)$ son tales que $\delta \simeq \eta$, entonces $\delta_\# = \eta_\#$.
- Si $\delta \in \mathcal{P}(X, x_0, y_0)$, $(\delta_\#)^{-1} = \overline{\delta}_\#$.
- $(e_x)_\# = id_{\pi(X,x)}$.
- Para cada $\delta \in \mathcal{P}(X, x, y)$, $\delta_\#$ es un isomorfismo.

Si el grupo fundamental de un espacio topológico X no depende de la escogencia del punto base denotamos a dicho grupo como $\pi_1(X)$

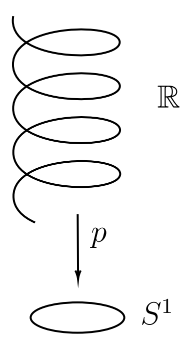
1.4. **Grupo fundamental del circulo.** Como primer ejemplo no trivial va a ser calcular el grupo fundamental del circulo S^1. Se demostrará que $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Teorema 1.4.1. La función $\Phi\colon \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1)$, $\Phi(n) = [w_n]$ donde $w_n\colon I \to S^1$ es el lazo $w_n(t) = (\cos 2\pi nt, \sin 2\pi nt)$ es un isomorfismo de grupos.

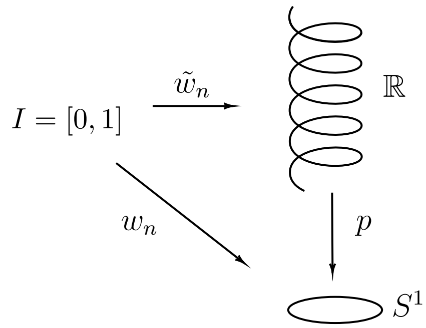
La idea general de la prueba va a ser comparar caminos en S^1 con caminos en $\mathbb{R}$. Para ello considerar, $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ cuya asignación es,

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{R} &\to S^1 \\ t &\mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)\,. \end{aligned}$$

La recta real podemos visualizarla dentro de $\mathbb{R}^3$ como la hélice $i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, donde $i(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$ así $p = p_{12} \circ i$ donde $p_{12}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Visualmente,



Tome, $\tilde{w}_n\colon I \to \mathbb{R}$ donde $\tilde{w}_n(t) = nt$ con $n \in \mathbb{Z}$ cuyo propósito es estirar el intervalo $[0,1]$ a $[0, n]$. Geométricamente en la hélice, $\tilde{w}_n(I)$ empieza en 0 y gira $|n|$ vueltas. Lo siguiente es definir $w_n\colon I \to S^1$ con $w_n(t) = (\cos 2\pi nt, \sin 2\pi nt)$. El camino w_n comienza y termina en el punto base $(1, 0)$ girando $|n|$ vueltas alrededor de S^1, en sentido horario si $n > 0$ y en sentido antihorario si $n < 0$. Como además, $w_n = p \circ \tilde{w}_n$, luego se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo,



Se dice que $\tilde{w}_n$ levanta a el camino w_n sobre el circulo a $\mathbb{R}$. Mientras que $\tilde{w}_n$ sube y baja en la hélice, la proyección w_n gira sobre S^1.

Demostración. Φ está bien definida, es un homomorfismo de grupos y es biyectiva.

- Para la buena definición considere, $\tilde{w}_n \colon I \to \mathbb{R}$ donde $\tilde{w}_n = nt$. Note que $\tilde{w}_n(0) = 0$ y $\tilde{w}_n(1) = n$. Como $w_n = p \circ \tilde{w}_n$ luego por definición $\Phi(n) = [p \circ \tilde{w}_n]$. Considere cualquier otro camino $\tilde{f} \colon I \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}(0) = 0$ y $\tilde{f}(1) = n$. Note que $\tilde{f} \simeq \tilde{w}_n$ bajo la homotopía,
$$H(t,s) = (1-s)\tilde{w}_s + s\tilde{f}.$$
No es difícil ver que $p \circ \tilde{w}_n \simeq p \circ \tilde{f}$ y así $\Phi(n) = [p \circ \tilde{f}]$ concluyendo que $[w_n] = [p \circ \tilde{f}]$.

- Para ver que Φ es un homomorfismo de grupos se define la traslación $\mathcal{T}_m \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $\mathcal{T}_m(x) = x + m$. Note que si $\tilde{w}_n$ es un camino de 0 a n, $\mathcal{T}_m \circ \tilde{w}_n$ es un camino de m a $n+m$, así, $\tilde{w}_m * \mathcal{T}_m \circ \tilde{w}_n$ es un camino de 0 a $m+n$. Ahora como $p \circ (\tilde{w}_n * \mathcal{T}_m \circ \tilde{w}_n) \simeq p \circ (\tilde{w}_{m+n})$ se tiene,
$$\begin{aligned}\Phi(m+n) &= [p \circ \tilde{w}_{n+m}] = [p \circ (\tilde{w}_m * \mathcal{T}_m \circ \tilde{w}_n)] \\ &= [(p \circ \tilde{w}_m) * (p \circ \mathcal{T}_m \circ \tilde{w}_n)] \\ &= [w_m * w_n] = [w_m][w_n] = \Phi(m)\Phi(n).\end{aligned}$$

Para probar que Φ es biyectiva se hará uso de los siguientes lemas,

Lema 1.4.2 (Levantamiento de caminos)**.** Para todo camino $f \colon I \to S^1$ con $f(0) = x_0$ y para cada $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, existe un único levantamiento $\tilde{f} \colon I \to \mathbb{R}$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$ y $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$.

Lema 1.4.3 (Levantamiento de homotopías)**.** Para toda homotopía de caminos $f_s \colon I \to S^1$ con $f_s(0) = x_0$ y para cada $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, existe una única homotopía $\tilde{f}_s \colon I \to \mathbb{R}$ tal que $p \circ \tilde{f}_s = f_s$ y $\tilde{f}_s(0) = \tilde{x}_0$.

En lo que resta de la prueba considere $(1,0) \in S^1$ como punto base. Tome $x_0 = (1,0)$ y $\tilde{x}_0 = 0$.

- Para ver que Φ es sobreyectiva sea $[f] \in \pi_1(S^1, (1,0))$ donde $f \colon I \to S^1$ y $f(0) = (1,0) = f(1)$. Por el lema 1.4.2, existe un único camino $\tilde{f} \colon I \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}(0) = 0$.

Por otro lado como, $0 \in p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z}$ y $\left(p \circ \tilde{f}\right)(1) = f(1) = (1,0)$ se tiene que $\tilde{f}(1) \in p^{-1}(1,0) = \mathbb{Z}$. Si se toma $\tilde{f}(1) = n \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\tilde{f}$ es un camino de 0 a n que son homotópicos al ser caminos en $\mathbb{R}$. Finalmente se por definición $\Phi(n) = [f] = [p \circ \tilde{w}_n]$ que, al ser f un camino cualquiera, Φ deber ser sobreyectivo.

- Para ver que Φ es inyectiva suponga $\Phi(n) = \Phi(m)$ que por definición $w_m \simeq w_n$ para algunos $m, n, \in \mathbb{Z}$. Sea $f_s\colon I \to S^1$ homotopía entre w_n y w_m, así, $f_0 = w_n$ y $f_1 = w_m$. Como $w_n(0) = w_n(0) = (1,0)$ entonces $f_s(0) = (1,0)$. Por el lema 1.4.3, existe una única homotopía $\tilde{f}_s\colon I \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}_s(0) = 0$. Por la unicidad de $\tilde{f}_s$, $\tilde{f}_0 = \tilde{w}_n$ y $\tilde{f}_1 = \tilde{w}_m$. Como $\tilde{f}_s$ es una homotopía de caminos $\tilde{f}_s(1)$ es constante para todo s así $\tilde{f}(1) = \tilde{w}_m(1) = \tilde{w}_n(1)$ pero $\tilde{w}_n(1) = n$ y $\tilde{w}_m(1) = m$. Se concluye $m = n$.

Se concluye $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. □

1.5. **Homomorfismos inducidos.** Antes de ver algunas aplicaciones del grupo fundamental del circulo se describen propiedades generales de homotopía y como cambia el grupo fundamental $\pi_1(X,x)$ de un espacio topológico X ante funciones continuas $f\colon X \to Y$.

Proposición 1.5.1. Sean X, Y espacios topológicos. Si $f \simeq f'\colon X \to Y$ y $g \simeq g'\colon Y \to Z$, entonces $g \circ f \simeq g' \circ f'\colon X \to Z$.

Demostración. Por hipótesis $f \simeq f'$ y $g \simeq g'$ luego existen homotopías F, G tales que $F\colon X \times I \to Y$ y $G\colon Y \times I \to Z$. Considere el siguiente diagrama que expresa la relación entre F, G,

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "F\times id"] \arrow[dr, "H"'] & Y \times I \arrow[d, "G"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

donde $H = G \circ (F \times id)$ es una homotopía $g \circ f$ y $g' \circ f'$. □

Corolario 1.5.2. Sean X, Y espacios topológicos. Si $f \simeq f'\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$. Entonces, $(g \circ f) \simeq (g' \circ f')\colon X \to Z$.

Sean $(X,x), (X,y)$ espacios topológicos punteados, una función continua entre estos espacios $f\colon (X,x) \to (Y,y)$ es una función continua tal que $f(x) = y$. Sea $\gamma \in \Omega\,(X,x)$ luego $f \circ \gamma \in \Omega\,(Y,y)$, así f induce el siguiente morfismo,

$$\begin{aligned} f_*\colon \pi_1(X,x_0) &\to \pi_1(Y,y_0) \\ [\gamma] &\mapsto [f \circ \gamma]. \end{aligned}$$

Del ultimo corolario se desprende la buena definición de f_* y es que si, $[\gamma] = [\eta]$ con $\gamma, \eta \in \Omega\,(X,x_0)$ entonces $[f \circ \gamma] = [f \circ \eta]$. Una propiedad fundamental de f_* es que es un homomorfismo de grupos. En efecto,

$$f_*\left([\gamma][\eta]\right) = f_*\left([\gamma * \eta]\right) = f \circ (\gamma * \eta),$$

donde,

$$(f \circ \gamma) * (f \circ \eta) = f \circ (\gamma * \eta)\colon t \mapsto \begin{cases} f(\gamma(2t)) & 0 \le t \le 1/2 \\ f(\eta(2t-1)) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

y así, $f_*([\gamma][\eta]) = f_*([\gamma * \eta]) = f \circ (\gamma * \eta) = (f \circ \gamma) * (f \circ \eta) = f_*([\gamma]) f_*([\eta])$.

Proposición 1.5.3. Algunas propiedades y resultados del morfismo inducido por f.

- f_* es un homomorfismo de grupos.
- Si $f\colon X \to Y$ con $x_0, x_1 \in X$ y $\delta\colon I \to X$ tal que $\delta(0) = x_0$ y $\delta(1) = x_1$. Suponga que $f(x_0) = y_0$ y $f(x_1) = y_1$, entonces $(f \circ \delta)_\# \circ f_* = f_* \circ \delta_\#$. Lo anterior indica que el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\delta_\#"'] & \pi_1(Y, y_0) \arrow[d, "(f\circ\delta)_\#"] \\ \pi_1(X, x_1) \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(Y, y_1) \end{tikzcd}$$

- $\left(id_{(X,x)}\right)_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$.
- Sean $f\colon (X, x) \to (Y, y)$ y $g\colon (Y, y) \to (Z, z)$ funciones continuas, entonces,
$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$
- $f_*([\overline{\gamma}]) = (f_*([\gamma]))^{-1}$
- Sea $c_y\colon (X, x) \to (Y, y)$ función constante y, se tiene que $(c_y)_*$ es trivial.

Teorema 1.5.4. Si, $f\colon (X, x) \to (Y, f(x))$ es un homeomorfismo, entonces,
$$f_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x)$$
es un isomorfismo.

Demostración. Sea $g = f^{-1}$. Como $f \circ g = id_{(Y,y)}$ y $g \circ f = id_{(X,x)}$ se sigue que $(f_*)^{-1} = g_*$ y $(g_*)^{-1} = f_*$ concluyendo. $\square$

Definición 1.5.5. Al par ordenado (X, A) donde X es un espacio topológico y $A \subseteq X$ es un subespacio de X se le llama par topológico. Si (X, A) y (Y, B) son pares topológicos y $f\colon X \to Y$ es una función tal que $f(A) \subseteq B$ escribimos $f\colon (X, A) \to (Y, B)$.

Definición 1.5.6. Sean (X, A) y (X, B) pares topológicos y $f, g\colon (X, A) \to (Y, B)$ funciones continuas. Decimos que f y g son homotópicas relativas a A y se escribe $f \simeq_A g$ si existe una función continua $H\colon (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ tal que,
$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x), \quad H(a, s) = f(a) = g(a),$$
esta ultima condición es para todo $a \in A$ y todo $s \in I$. Note que $f|_A = g|_A$, además H se mantiene fija sobre A, es decir, $H_s|_A = f|_A$. A H se le llama homotopía relativa a A entre f y g. La relación $f \simeq_A g$ es de equivalencia. Es más, si $A = \{0, 1\}$ y f, g son caminos, la relación de equivalencia obtenida es $f \simeq_p g$. Si $A = \emptyset$ entonces se escribe $f \simeq g$.

1.6. **Espacios homotópicos equivalentes.** En las subsecciones anteriores se describió la relación de homotopía entre dos funciones *(respectivamente caminos)* continuas. Un concepto similar es el de relación de homotopía equivalente definida entre dos espacios topológicos.

Definición 1.6.1. Sea X, Y espacios topológicos. Si existen funciones $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to X$ tales que,
$$f \circ g \simeq id_Y, \qquad g \circ f \simeq id_X,$$
entonces se dice que X y Y son equivalentes homotópicos y se escribe $X \simeq Y$.

Definición 1.6.2. Sean X, Y espacios topológicos punteados $(X, x), (Y, y)$. Si existen funciones $f\colon (X, x) \to (Y, y)$ y $g\colon (Y, y) \to (X, x)$ tales que $f(x) = y$ y $g(y) = x$ y además,

$$f \circ g \simeq_x id_Y, \qquad g \circ f \simeq_x id_X,$$

entonces se dice que (X, x) y (Y, y) son equivalentes homotópicos como espacios punteados. Note que en las definiciones anteriores g es la inversa homotópica de f, así f es llamada homotopía equivalente.

Teorema 1.6.3. Si (X, x) y (Y, y) son equivalentes homotópicos como espacios punteados, esto es, las homotopías involucradas en la definición son relativas $\{0, 1\}$, entonces, $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(Y, y)$.

Proposición 1.6.4. La relación de homotopia equivalente entre espacios es una relación de equivalencia.

El grupo fundamental se preserva entre homotopías equivalentes. Para ello se introduce el siguiente lema,

Lema 1.6.5. Sea $h\colon X \to Y$ y $k\colon X \to Y$ funciones continuas, $x_0 \in X$. Considere $h(x_0) = y_0$ y $k(x_0) = y_1$. Si $h \simeq k$, entonces existe un camino α en Y que va desde y_0 a y_1 tal que $k_* = \alpha_\# \circ h_*$. Lo anterior indica que el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "h_*"] \arrow[dr, "k_*"'] & \pi_1(Y, y_0) \arrow[d, "\alpha_\#"] \\
& \pi_1(Y, y_1)
\end{tikzcd}$$

Teorema 1.6.6. Si $f\colon X \to Y$ es una homotopía equivalente, el morfismo inducido $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, f(x_0))$ es un isomorfismo para cualquier punto base $x \in X$.

Demostración. Sea $g\colon Y \to X$ inversa homotópica de f, es decir, $g \circ f \simeq id_X$ y $g \circ f \simeq id_Y$. Considere,

$$(X, x_0) \xrightarrow{f_{x_0}} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (X, x_1) \xrightarrow{f_{x_1}} (Y, y_1)$$

donde $y_0 = f(x_0)$, $y_0 = g(x_1)$ y $y_1 = f(x_1)$. Sea α un camino de x_0 a x_1, por el lema anterior y $g \circ f \simeq id_X$ tenemos,

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "(id_X)_*"] \arrow[dr, "(g\circ f)_*"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[d, "\alpha_\#"] \\
& \pi\,(X, g(f(x_0)))
\end{tikzcd}$$

luego $(g \circ f)_* = \alpha_\# \circ (id_X)_* = \alpha_\#$ siendo este último un isomorfismo. Además $(g \circ f)_* = g_* \circ (f_{x_0})_*$ implicando que g_* y f_{x_0} son sobreyectiva e inyectiva respectivamente. Por un argumento análogo $(f_{x_1})_* \circ$ y g_* son sobreyectiva e inyectiva respectivamente. Se concluye que f_* y g_* son isomorfismos. $\square$

El teorema anterior dice que para la preservación del grupo fundamental es suficiente con que los espacios sean homotópicamente equivalentes, así las condiciones sobre los puntos base puede ser eliminadas.

1.7. **Retracciones, retractos y retractos por deformación.**

Definición 1.7.1. Sea X un espacio topológico. Una retracción de X sobre un subespacio $A \subseteq X$ es una función $r\colon X \to A$ continua tal que $r|_A = id_A$. Se dice que A es un retracto de X.

Proposición 1.7.2. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio. Sea $r\colon X \to A$ una función continua. Son equivalentes,

- r es una retracción.
- $r(a) = a$ para todo $a \in A$.
- $r \circ i = id_A$ donde i es la inclusión de A en X. Lo anterior indica que el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "id_A"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & A \end{tikzcd}$$

- $r\colon X \to A$ es una extensión de $id_A\colon A \to A$.

Ejemplo 1.7.3.

- Los unitarios $\{x\}$ son una retracción de (X, x) para todo x.
- $[a, b]$ es un retracto de $\mathbb{R}$.
- $I \times \{0\}$ es un retracto de $I \times I$ a través de la proyección $p(x, y) = (x, 0)$.
- Sea $D^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ el disco unitario convexo y cerrado. S^1 es un retracto del disco perforado $D^1 \setminus \{0\}$ a través de la función $f(x) = x/\|x\|$

Lema 1.7.4. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio. Sea $r\colon X \to A$ un retracción, $i\colon A \hookrightarrow X$ el morfismo inclusión con $x \in A$. Entonces, $r_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(A, x)$ y $i_*\colon \pi_1(A, x) \to \pi_1(X, x)$ son sobreyectiva e inyectiva respectivamente.

Demostración. Al considerar el diagrama de la proposición anterior, el ítem c) se desprende,

$$\begin{tikzcd} \pi(A, x) \arrow[r, hook, "i_*"] \arrow[dr, "(id_A)_*"'] & \pi_1(X, x) \arrow[d, "r_*"] \\ & \pi(A, x) \end{tikzcd}$$

de donde $r_* \circ i_* = (id_A)_* = id_{\pi_1(A,x)}$. Como este último es un isomorfismo se tiene que r_* y i_* son sobreyectiva e inyectiva respectivamente. □

Teorema 1.7.5. S^1 no es un retracto de D^2.

Demostración. Por contradicción suponga que S^1 es un retracto de D^2, esto es, existe una retracción $r\colon D^2 \to S^2$. Note que $\pi_1(D^2, x) \cong [e_x]$ para cualquier $x \in D^2$ al ser convexo en $\mathbb{R}^2$, luego $r_*\colon \{x_0\} \mapsto \mathbb{Z}$ es sobreyectivo. Contradicción. □

Definición 1.7.6. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio. A es un retracto por deformación de X y se denota $X \rightsquigarrow A$ si existe una retracción $r\colon X \to A$ tal que $r \circ i = id_A$ y $i \circ r \simeq_A id_X$ donde $i\colon A \hookrightarrow X$ es la inclusión de A en X.

Ejemplo 1.7.7. S^n es un retracto por deformación de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Por efectos de practicidad, sea $A = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ y $B = S^n$. Considerando el retracto $r\colon A \to B$ donde $r(x) = x/\|x\|$

se tiene que $r|_B = id_B$ y que $i \circ r \simeq id_A$ vía la homotopía $H\colon A \times I \to A$ definida como $H(x,t) = x/\left((1-t) + t\,\|x\|\right)$.

Proposición 1.7.8. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio. Se tiene que,

- Si $X \rightsquigarrow A$, entonces $X \simeq A$.
- Si $X \rightsquigarrow A$ con $x \in A$, entonces $\pi_1(X,x) \cong \pi_1(A,x)$.

Ejemplo 1.7.9.

- Puesto que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightsquigarrow S^1$ luego $\pi_1(S^1) \cong \pi_1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\right) \cong \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ puesto que,
$$\pi_1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x_0\right) \cong \pi_1\left(S^1, x_0\right) \cong \mathbb{Z} \neq [e_{x_0}] \cong \pi(\mathbb{R}^2, x_0).$$
- El origen $0 \in \mathbb{R}^n$ es un retracto por deformación de $\mathbb{R}^n$ o del disco D^n.

Definición 1.7.10. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es contráctil o contraíble si $X \simeq \{p\}$ para algún $p \in X$, esto es, X es homotópicamente equivalente a un punto.

Proposición 1.7.11. Un espacio topológico X es contraíble si, y solo si, $id_X \simeq e_x$ para algún $x \in X$.

Demostración. Si X es contraíble, $X \simeq \{p\}$ para algún $p \in X$ así existen f, g funciones continuas $f\colon X \to \{x\}$, $g\colon \{x\} \to X$ tales que $f \circ g \simeq id_{\{p\}}$ y $g \circ f \simeq id_X$. Note que $g \circ f = e_{g(p)}$ concluyendo que $e_{g(p)} \simeq id_X$.

Para el contrario suponga que $id_X \simeq e_x$ para algún $x \in X$. Sea $i\colon \{x\} \hookrightarrow X$ morfismo inclusión luego $i \circ e_x \simeq id_x$ y $e_x \circ i \simeq id_x$ implicando $X \simeq \{x\}$. $\square$

Proposición 1.7.12. Sea X un espacio topológico. Si X es contraíble, entonces $\pi_1(X,x)$ es trivial para algún $x \in X$.

Demostración. Por hipotesis X es contraíble entonces $X \simeq \{p\}$ para algún $p \in X$ luego a nivel de grupo fundamental se tiene que, $\pi_1(X,x) \simeq \pi_1(\{p\}) = [e_p]$. $\square$

1.8. **Aplicaciones inmediatas de $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.**

Teorema 1.8.1 (Fundamental del álgebra)**.** Sea $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ con $n > 0$ y $a_i \in \mathbb{C}$. Entonces, f tiene una raíz compleja.

Demostración. Si $a_n = 0$ entonces $z = 0$ es una solución. Por tanto, suponga que $a_n \neq 0$.

Considerar $F(z,t) = z^n + t(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n)$ con $z \in \mathbb{C}$ y $t \in I$. Donde F es continua y además,
$$F(z,0) = z^n := p_n(z), \qquad F(z,1) = f(z).$$
Así, se tiene que $p_n(z) \simeq f(z)$ vía F.

Sea $C_r = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = r\}$ y $r = \max\{1, \sum |a_i|\}$, restringiendo F a los $z \in C_r$,
$$\begin{aligned} |F(z,t)| &\geq |z|^n - |t|\left(|a_1|\,|z|^{n-1} + \cdots + \cdots |a_n|\right) \\ &= r^n \left(1 - |t| \left(\frac{|a_1|}{r} + \cdots + \frac{|a_n|}{r^n}\right)\right) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Lo anterior dice que para un r lo suficientemente grande F describe la homotopía,
$$F\colon C_r \times I \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

de f y p_n.

Por contradicción, suponga que f nunca se anula. Se define $G(z,t) = f(tz)$ función continua, donde,

$$G(z,0) = f(0) = a_n, \qquad G(z,1) = f(z)$$

restringiendo G a los $z \in C_r$, G describe la homotopía $G\colon C_r \times I \to \mathbb{C}^*$ entre c_{a_n} y f *(acá c_{a_n} es la función constante a_n)*. Según lo anterior, $p_n \simeq f \simeq e_{a_n}$ implicando $e_{a_n} \simeq p_n$. Note que,

$$(C_r, r) \xrightarrow{e_{a_n}} (\mathbb{C}^*, a_n) \quad y \quad (C_r, r) \xrightarrow{p_n} (\mathbb{C}^*, r^n)\,,$$

induciendo el siguiente diagrama conmutativo,

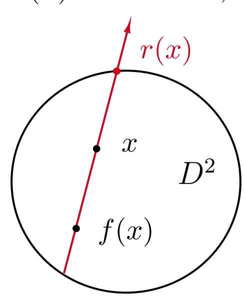
$$\begin{tikzcd}
\pi_1(C_r, r) \cong \mathbb{Z} \arrow[r, "(p_n)_*"] \arrow[dr, "(e_{a_n})_*"'] & \pi_1(\mathbb{C}^*, r^n) \cong \mathbb{Z} \arrow[d, "\delta_\#"] \\
 & \pi_1(\mathbb{C}^*, a_n) \cong \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

donde δ es un camino arbitrario en $\mathbb{C}^*$ que une a r^n y a_n.

Se puede demostrar que $\mathbb{C}^*$ es un retracto por deformación de S^1, siguiendo así que $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$. Note que $(e_{a_n})_*$ es trivial, como $(e_{a_n})_* = \delta_\# \circ (p_n)_*$ luego, $(p_n)_*(1) = 0$ donde 1 es el generador de $\pi_1(C_r, r)$, pero $(p_n)_*(1) = n \cdot 1$. Contradicción. $\square$

Teorema 1.8.2 (del punto fijo de Brower)**.** Cualquier función continua $f\colon D^2 \to D^2$ tiene un punto fijo, es decir, existe $x \in D^2$ tal que $f(x) = x$.

Demostración. Por contradicción, suponga $f(x) \neq x$ para todo $x \in D^2$. Se define $r\colon D^2 \to S^1$ donde $r(x)$ es la intersección de la recta que une a $f(x)$ y x con S^1. Bajo esta asignación x si $x \notin S^1 = \partial D^2$ está entre $f(x)$ y $r(x)$. Si $x \in S^1$, $r(x) = x$ si $x \in S^1$. Visualmente,



note que $r|_{S^1} = id|_{S^1}$, por tanto si $i\colon S^1 \hookrightarrow D^2$ luego $r \circ i = id_{S^1}$, permitiendo inducir a nivel de grupo fundamental el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "(id_{S^1})_*"'] & \pi_1(D^2)\ trivial \arrow[d, "r_*"] \\
 & \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

de donde $id_{\mathbb{Z}} = (id_{S^1})_* = r_* \circ i_*$. Contradicción, puesto que si $id_{\mathbb{Z}}$ no se factoriza a través del morfismo trivial. $\square$

Teorema 1.8.3. S^n con $n \geq 2$ es simplemente conexo.

Corolario 1.8.4. $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ si $n \neq 2$.

Demostración. La pruba se divide por casos.

- Para $n=1$. Suponga $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ homeomorfismo, luego $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$. Como $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es conexo por caminos mientras que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no lo es, al ser esta una propiedad topológica se concluye que $\mathbb{R}^2 \ncong \mathbb{R}^n$.
- Para $n>2$. Suponga $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ homeomorfismo, luego $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$, así,
$$\pi_1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\right) \cong \mathbb{Z} \ncong [e_x] \cong \pi_1\left(\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}\right)$$

Se concluye que $\mathbb{R}^2 \ncong \mathbb{R}^n$ si $n \neq 2$. $\square$

Según las subsecciones anteriores se tiene a modo de resumen,

Grupos fundamentales de algunos espacios
$\pi_1(D^n)$ *es trivial para todo* $n \geq 1$
$\pi_1\left(S^1\right) \cong \mathbb{Z}$ *para* $n=1$
$\pi_1(\mathbb{R}^n)$ *es trivial para todo* $n \geq 1$
$\pi_1(S^n) \cong \pi_1\left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)$ *es trivial para todo* $n \geq 2$

1.9. **Algo de teoría de grupos.** En esta subsección se menciona algo de teoría de grupos. La idea es utilizar herramientas de dicha teoría en problemas topológicos, que, en este caso ayudaran a calcular grupos fundamentales. De manera muy rápida,

Definición 1.9.1. Sea $S=\{x_\alpha\colon \alpha \in A\}$ el *alfabeto*. Sea el conjunto de símbolos $S^{-1}=\{s_\alpha^{-1}\colon \alpha \in A\}$. Suponga que $S \cap S^{-1}=\emptyset$. Con el alfabeto anterior se contruye, S^* un conjunto de n-úplas $x_1x_2\cdots x_n$ de $S \cup S^{-1}$ con $0 \leq n < \infty$.

Ejemplo 1.9.2. Considere $S=\{a,b\}$. Las palabras pueden ser $\emptyset$ o a o $aba^{-1}ab^{-1}$ o $ab^{-1}baaaaaa$, etc.

Por notación se escribe $a^1=a$, $a^0=0$, $a^m a^n = a^{m+n}$.

Definición 1.9.3. Una reducción elemental es *'transformar'* palabras del tipo $ax_\alpha x_\alpha^{-1}b$ y obtener ab, o del tipo $ax_\alpha^{-1}x_\alpha b$ y obtener ab.

Definición 1.9.4. Si una palabra no admite reducción se dice que es reducida.

Ejemplo 1.9.5. $\emptyset, a, ab^ab^{-1}$ son reducidas, mientras que $aa^{-1}bbbbbbbaaa$ no lo es.

Note que, según lo anterior, existe el morfismo inclusión $S \to S^*$ que envía cada símbolo g a la palabra de una sola letra g .

Definición 1.9.6. El grupo libre de un conjunto S es el conjunto de todas las palabras reducidas en S^* cuyas operaciones,

- La multiplicación es la concatenación seguida de una reducción elemental para obtener una palabra reducida.
- La palabra inversa de $x_1x_2\cdots x_n$ es $x_1^{-1}x_2^{-1}\cdots x_n^{-1}$.
- La identidad es la palabra $\emptyset$.

dicho grupo se denota como $F(S)$. El conjunto S es llamado generador.

Lema 1.9.7. Sea G un grupo y S un conjunto. Sea $\varphi\colon S \to G$ una función. Entonces existe un único homomorfismo $f\colon F(S) \to G$ tal que el siguiente driagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & G \\ F(S) \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Esta propiedad es llamada, propiedad universal de los grupos libres.

Definición 1.9.8. Sea S un conjunto, y sea $R \subseteq F(S)$ un subconjunto. Se denota como $\langle\langle R \rangle\rangle$ el subgrupo normal mas pequeño de $F(S)$ que contiene a R. De manera explicita,

$$\langle\langle R \rangle\rangle = \left\{ \prod_{i=1}^{n} g_i r_i g_i^{-1} \colon n \in N, r_i \in R, g_i \in F(S) \right\}$$

Al ser $F(S)$ un grupo y $\langle\langle R \rangle\rangle$ un grupo normal de $F(S)$, pensando en el cociente escribimos $\langle S|R \rangle = F(S)/\langle\langle R \rangle\rangle$.

Lema 1.9.9. Sea G un grupo, y S un subconjunto. Sea $\varphi \colon S \to G$ una función tal que $f(r) = 1$ para todo $r \in R$, esto es, si $r = x_1^{\pm} x_2^{\pm} \cdots x_n^{\pm}$, $\varphi(r) = \varphi^{\pm}(x_1)\varphi^{\pm}(x_2) \cdots \varphi^{\pm}(x_n) = 1$. Entonces existe un único homomorfismo $f \colon \langle S|R \rangle \to G$ tal que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & G \\ \langle S|R \rangle \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Corolario 1.9.10. Sea G un grupo, y a $S = G$. Considere el morfismo identidad, que a su vez es sobreyectivo, $id \colon G \to G$. Entonces por los lemas anteriores, existe una sobreyección $f \colon F(G) \to G$. Tome $R = \ker(f) = \langle\langle R \rangle\rangle$. Entonces por el primer teorema de isomorfismos de grupos, $\langle G|R \rangle$ es una representación de G.

Definición 1.9.11. Suponga $G_1 = \langle S_1|R_1 \rangle$ y $G_2 = \langle S_2|R_2 \rangle$ dos presentaciones de grupos. Suponga $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Se define como el producto libre $G_1 * G_2$ como el conjunto,

$$G_1 * G_2 = \langle S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \rangle .$$

Lema 1.9.12. El grupo $G_1 * G_2$ es tal que para cualquier grupo K junto con los homomorfismos $\varphi_i \colon G_i \to K$, existe un único homomorfismo $f \colon G_1 * G_2 \to K$ tal que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} & G_2 \arrow[d, "j_2"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_1"] & \\ G_1 \arrow[r, "j_1"'] \arrow[drr, bend right, "\varphi 2"'] & G_1 * G_2 \arrow[dr, dashed, "f"] & \\ & & K \end{tikzcd}$$

Definición 1.9.13. Sean G_1, G_2 y H grupos tales que,

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & G_2 \\ G_1 & \end{tikzcd}$$

El producto libre amalgamado se define como,

$$G_1 *_H G_2 = G_1 * G_2 / \left\langle\left\langle \left\{ (j_2 \circ i_2)(h))^{-1}(j_1 \circ i_1)(h) \colon h \in H \right\} \right\rangle\right\rangle$$

La idea es identificar cosas de H en $G_1 * G_2$ como la misma cosa, dicha identificación se hace a través de las funciones $i_{1,2}$ y $j_{1,2}$. Se quiere que para todo $h \in H$, $(j_1 \circ i_1)(h) = (j_2 \circ i_2)(h)$ o lo que equivale a $(j_2 \circ i_2)(h))^{-1}(j_1 \circ i_1)(h) = 1$. Por tanto se toma de manera natural como el cociente del subgrupo normal de estos objetos.

Lema 1.9.14. El grupo $G_1 *_H G_2$ es tal que para cualquier grupo K junto con los homomorfismos $\varphi_i \colon G_i \to K$, existe un único homomorfismo $f \colon G_1 *_H G_2 \to K$ tal que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & G_2 \arrow[d, "j_2"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_1"] & \\
G_1 \arrow[r, "i_2"'] \arrow[drr, bend right, "\varphi_2"'] & G_1 *_H G_2 \arrow[dr, dashed, "f"] & \\
& & K
\end{tikzcd}$$

Una herramienta útil para calcular el grupo fundamental de algunos espacios un poco mas complejos es el teorema de Seifert—Van Kampen. Este consiste en calcular el grupo fundamental dividiéndolo en trozos abiertos apropiados cuyos grupos fundamentales ya hayan sido calculados.

Sea X un espacio topológico, tome $x_0 \in X$ y sea $\{A_\alpha\}_{\alpha I}$ espacios topológicos conexo por caminos tal que,

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \quad y \quad x_0 \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Las inclusiones $j_\alpha \colon A_\alpha \hookrightarrow X$ inducen para todo $\alpha \in I$, $(j_\alpha)_* \colon \pi_1(A_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$, luego por los lemas anteriores existe un único homomorfismo,

$$\varphi \colon \; *_{\alpha \in I}\, \pi_1(A_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0).$$

Considere $i_{\alpha\beta} \colon A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$ para todo $\alpha, \beta \in I$ con $\alpha \neq \beta$. Así,

$$\begin{tikzcd}
A_\alpha \cap A_B \arrow[r, "i_{\alpha\beta}"] \arrow[d, "i_{\alpha\beta}"'] & A_\alpha \arrow[d, "j_\alpha"] \\
A_\beta \arrow[r, "j_\beta"] & X
\end{tikzcd}$$

induce a nivel de grupo fundamental,

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(A_\alpha \cap A_B) \arrow[r, "(i_{\alpha\beta})_*"] \arrow[d, "(i_{\alpha\beta})_*"'] & \pi_1(A_\alpha) \arrow[d, "(j_\alpha)_*"] \\
\pi_1(A_\beta) \arrow[r, "(j_\beta)_*"] & \pi_1(X)
\end{tikzcd}$$

Note por como se contruyó φ que $(i_{\alpha\beta}(\eta))\left((i_{\beta\alpha})_*(\eta))^{-1}\right) \in \ker\varphi$ para todo $\eta \in \pi_1\left(A_\alpha \cap A_\beta, x_0\right)$, y para todo $\alpha, \beta \in I$.

Teorema 1.9.15 (Seifert - Van Kampen)**.** Sea X espacio topológico con $x_0 \in X$. Si $X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, donde $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ son subespacios topológicos conexo por caminos tal que $x_0 \in A_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Entonces,

- Si adicionalmente $A_\alpha \cap A_\beta$ es conexo por caminos para todo $\alpha, \beta \in I$ se tiene que,
$$\varphi\colon\ *_{\alpha \in I}\, \pi_1(A_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$
es sobreyectiva.
- Si adicionalmente $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ es conexo por caminos para todo $\alpha, \beta, \gamma \in I$ se tiene que,
$$\ker \varphi = \left\langle \left\langle (i_{\beta\alpha})_*(\eta) \right)^{-1} \colon \eta \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta, x_0), \alpha, \beta \in I \right\rangle \right\rangle$$

Corolario 1.9.16. Sea X un espacio topológico donde A, B son subespacios tales que $X = A \cup B$ y $A, B, A \cup B$ son conexo por caminos. Tome $x_0 \in A \cap B$ y las inclusiones,

$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "j"'] & A \arrow[d, hook, "u"] \\
B \arrow[r, hook, "v"] & A \cup B
\end{tikzcd}$$

Entonces se tiene que,

$$\pi_1(X, x_0) = \frac{\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0))}{\left\langle \langle i_*(\eta) j_*(\eta) \rangle^{-1} : \eta \in \pi_1(A \cap B, x_0) \right\rangle}$$

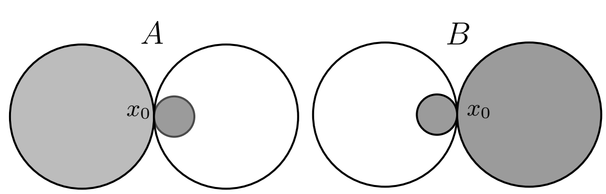
Corolario 1.9.17. Del corolario anterior si $A \cap B$ es simplemente conexo, $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0))$

De ahora en adelante se denotará la congruencia entre grupos fundamentales como $' ='$, así si $\pi_1(X, x_0) \cong G$ utilizando la notación escribimos $\pi_1(X, x_0) = G$. Si dicho grupo fundamental es trivial se escribe $\pi_1(X, x_0) = 1$

Definición 1.9.18. Sean X_1, X_2 espacios topológicos. Considere $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$. Se define la cuña de espacios X_1 y X_2 como $X_1 \vee X_2 := X_1 \sqcup X_2 / x_1 \sim x_2$.

Ejemplo 1.9.19. Se presentan algunos ejemplos del teorema de Seifert - Van Kampen,

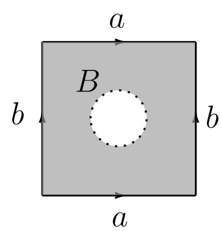
- Sea $X = S^n$ con $n \geq 2$. Sea A el complemento del polo norte, y B el complemento del polo sur. Escribimos $A = S^n \simeq \{n\}$ y $B = S^n \simeq \{s\}$. Bajo las proyecciones estereográficas se sabe que $A, B \simeq \mathbb{R}^n$. La intersección $A \cap B$ corresponde al cilindro $S^{n-1} \times (-1, 1)$ que al ser $(-1, 1)$ contraible, $A \cap B \simeq S^{n-1}$. Tenemos que $A, B, A \cap B$ son simplemente conexos, así X también lo es.
$$\pi(S^n) = \pi_1(A) * \pi_1(B) = 1.$$
- Sea $X = X_1 \vee X_2$ con X_1, X_2 espacios topológicos. Sean A y B como se sigue en el gráfico,



donde A corresponde a X_1 y un trozo contraible a x_0 y B corresponde a X_2 y un trozo contraible a x_0. La intersección corresponde a los dos abiertos correspondientes contraibles a x_0. Así, $\pi_1(A) = \pi_1(X_1), \pi_1(B) = X_2, \pi_1(A \cap B) = 1$.

$$\pi_1(X \vee X_2) = \pi_1(X_1) * \pi_2(X_2).$$

- Sea $X = T$ donde T es el toro.



Sean A y B donde B es el disco punteado del centro y A es el complemento de B. Note que, $A \cong S_1 \vee S_1, A \cap B \cong S_1, B \cong D^1$ así $\pi_1(S_1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2, \pi_1(A \cap B) = \mathbb{Z} = \langle r \rangle$ y $\pi_1(D^1) = 1$, donde F_2 es $F(S)$ con $|S| = 2$ y $r = aba^{-1}b^{-1}$.

$$\pi_1(T) = \frac{\pi_1(S_1 \vee S_1) * \pi_1(D_1)}{\langle\langle \pi_1(S_1) \rangle\rangle} = \frac{F_2}{\langle\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle\rangle} = \left\langle a, b \colon aba^{-1}b^{-1} \right\rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

2. CW complejos

En topología algebráica existen espacios topológicos llamados CW complejos, que por su practicidad son muy útiles en el cálculo de distintos objetos como lo puede ser el grupo fundamental. Estos espacios se construyen de manera inductiva como se sigue,

Definición 2.0.1 (construcción de un CW complejo)**.** Se comienza con un espacio discreto $X^{(0)}$, cuyos puntos son llamados 0-células. Inductivamente, se forma el n-esqueleto $X^{(n)}$ desde $X^{(n-1)}$ pegando n-celulas $e^n_\alpha = \operatorname{Int} D^n_\alpha$ vía $\varphi^n_\alpha \colon \partial D^n_\alpha = S^{n-1}_\alpha \to X^{(n-1)}$, es decir,

$$X^{(n)} = X^{(n-1)} \sqcup_\alpha D^n_\alpha / \sim$$

bajo la identificación $x \sim \varphi^n_\alpha(x)$ para todo $x \in \partial D^n_\alpha$. Este proceso puede terminarse haciendo $X = X^\ell$ para algún ℓ o seguir de manera infinita en cuyo caso $X = \bigcup_n X^{(n)}$. El espacio X es llamado CW complejo. El menor n tal que $X = X^{(n)}$ es llamado la dimensión de X

Ejemplo 2.0.2. Algunos ejemplos de CW complejos son,

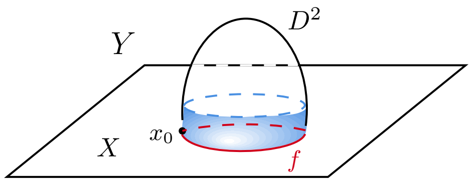
- Dimensión 0,
  Todo espacio topológico discreto tiene estructura de CW complejo de dimensión 0.
- Dimensión 1,
  - Un intervalo; dado un 0-esqueleto de dos puntos x, y agregar una 1-célula que corresponde a un intervalo pegando uno de los extremos a x y el otro a y. Alternativamente, un intervalo es una 1-celula con ninguna 0-célula.
  - Un circulo; dado un 0-esqueleto de un sólo punto x pegar una 1-célula cuyos puntos finales son ambos x. Alternativamente, dado un 0-esqueleto de dos puntos x, y pegar una 1-célula pegando uno de los extremos a x y el otro a y, luego pegar otra 1-célula pegando uno de los extremos a y y el otro a x.
- Dimensión n,

– n-esfera; dado un 0-esqueleto de un solo punto x pegar una n-célula a x.

Considere X un espacio topológico. El espacio obtenido de pegar una n-célula a X a través de f es, $X \cup_f D^n = X \sqcup D^n / \sim$ bajo la identificación $x \sim f(x)$.

Proposición 2.0.3. Sea X un espacio topológico, con $x_0 \in X$. Sea $f \colon S^1 \to X$ tal que $f(1) = x_0$. Note que f es esencia un lazo basado en x_0. Entonces, $\pi_1(X \cup_f D^2) = \pi_1(X, x_0)/ \langle\langle [f] \rangle\rangle$.

Demostración. Se trabajará sobre la siguiente ilustración,



Sea $Y = X \cup_f D^2$. Para aplicar el teorema de Seifert - Van kampen, considere A como la unión de X con la sección azul y B como el interior de D^2, esto es, $B = \operatorname{int} D^2$. Considere lo siguiente,

- X es retracto por deformación de A, es decir, $A \rightsquigarrow X$ y así, $\pi_1(X) = \pi_1(A)$.
- D^2 es simplemente conexo, luego $\pi_1(B) = 1$.
- La intersección $A \cap B$ corresponde a la franja azúl de la ilustración. Note que S^1 es un retracto por deformación de dicha franja *(visualmente, se puede colapsar la franja azúl a f, que es ensencia un lazo homótopo a S^1)* y así $\pi_1(A \cap B) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Tenemos por corolario que,

$$\pi_1(X \cup_f D^2, x_0) = \frac{\pi_1(X, x_0)}{\left\langle \langle i_*(\eta) j_*(\eta \rangle^{-1} : \eta \in \pi_1(S^1, x_0) \right\rangle = \mathbb{Z}}$$

note que $j_* \colon \pi_1(S^2) = \mathbb{Z} \to \pi_1(\operatorname{int} D^2) = 1$ por tanto $j_*(\eta)^{-1}$ es trivial. Note que $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, es decir, el generador de dicho grupo fundamental es dar una sola vuelta al circulo punteado azul, que en esencia es homotópico a f, por tanto,

$$\pi_1(X \cup_f D^2, x_0) = \pi_1(X, x_0)/ \langle\langle [f] \rangle\rangle$$

□

El siguiente corolario dice que todo grupo G es el grupo fundamental de algún espacio X.

Corolario 2.0.4. Sea G un grupo. Existe entonces un espacio topologico X tal que $\pi_1(X, x_0) = G$.

Demostración. Sea $X^{(0)}$ un punto. Para $X^{(1)}$ considerar cada $s_i \in S$ yagregar lazos basados en el punto del 0-esqueleto. Ahora, pegar 2-celular e_j^2 para $j = 1, \cdots, n$ y pegandolas a $X^{(1)}$ través de $f_i \colon S^1 \to X^{(1)}$ dado por los lazos base representados por $r_i \in F(S)$. Así, $X = \bigvee_{\alpha \in S} S^1 \bigcup_{\{r \in R\}} D^2$ que por la proposición anterior,

$$\pi_1(X) = \pi_1(\bigvee_{\alpha \in S} S^1)/ \langle\langle r_i \colon r_i \in R \rangle\rangle = F_S/ \langle\langle R \rangle\rangle = G$$

□

Proposición 2.0.5. Si $n \geq 3$, entonces $\pi_1(X \cup_f D^n) = \pi_1(X)$.

Demostración. Similar a la proposición anterior, considere $A = X \cup_f D^n \setminus \{0\}$ y $B = \operatorname{int} D^n$. Note que,

- $D^n \setminus \{0\}$ es un retracto por deformación de S^{n-1}, es decir $S^{n-1} \rightsquigarrow D^n \setminus \{0\}$ y así $\pi_1(S^{n-1}) = \pi_1(D^n \setminus \{0\}) = 1$ derivando que $\pi_1(A) = \pi_1(X)$.
- D^n es simplemente conexo, luego $\pi_1(B) = 1$.
- La intersección $A \cap B$ corresponde a $\operatorname{int} D^n \cong S^{n-1} \times (-1, 1)$ luego $\pi_1(A \cup B) = \pi_1(S^{n-1}) = 1$ al ser $n \geq 3$.

Por teorema de Seifert - Van kampen, $\pi_1(X \cup_f D^n) = \pi_1(A) = \pi_1(X)$. □

La proposición anterior nos dice que pegando n-células con $n \geq 3$ no influye en el grupo fundamental. En resumen,

$$\pi_1(X \cup_f D^n) = \begin{cases} \pi_1(X), & \text{para } n \geq 3 \\ \pi_1(X)/\left\langle [f] \right\rangle, & \text{para } n = 2 \end{cases}$$

References

[1] M. J. Greenberg. Algebraic topology: a first course. 2018.
[2] A. Hatcher. Algebraic topology. 2005.
[3] W. S. Massey. Algebraic topology: an introduction. 1967.
[4] G. N. Rubiano Ortegón. Fundamentos de topología algebraica.
[5] T. tom Dieck. Algebraic topology. 2008.