Convergencia de las Series de Fourier

Pares Ordenados

Proyecto

Jonathan Raymundo Torres Cardenas
Asesor: Sergio Alejandro Carrillo Torres

2 de mayo de 2023

Resumen

Las series de Fourier son expansiones en series de senos y cosenos de funciones periódicas. Su estudio se remonta a las soluciones a la ecuación del calor dadas por Jean-Baptiste Joseph Fourier en 1807. Actualmente constituyen un pilar del Análisis Matemático y son una herramienta versátil en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales.

El objetivo de este trabajo es estudiar algunos resultados básicos de la convergencia de dichas series. En la primera parte estableceremos su convergencia en $\mathcal{L}^2$ y el teorema de Chernoff sobre convergencia para funciones diferenciables. Además incluimos resultados clásicos como el Lema de Riemann-Lebesgue, la Identidad de Parseval y aplicaciones al cálculo de series. En la segunda parte revisamos la construcción de una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto.

1. Definiciones y resultados preliminares

Sea $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ una función integrable según Riemann y de periodo 2π. Sus *coeficientes de Fourier* están definidos como:

$$\widehat{f}(n) = a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Gracias a la periocidad de f, el intervalo de integración puede ser cualquiera de longitud 2π. Además, la *serie de Fourier* de f se define por:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}.$$

Denotaremos por:

$$S_{m,n}(f)(x) = \sum_{k=-m}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \quad m, n \in \mathbb{N},$$

a estas sumas parciales. Si $m = n = N$, $S_N(f)(x)$, nos referiremos a ella como la *suma parcial simétrica* de la serie de Fourier de f.

Sea $\Re$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de funciones complejas integrables según Riemann en $[0, 2\pi]$. Consideraremos el producto interno sobre $\Re$ definido como:

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}d\theta,$$

que a su vez induce la norma. Nos referiremos a esta como la norma en $\mathcal{L}^2$, este espacio es el completado de $\Re$ con esta norma, aunque no entraremos en detalles en este trabajo.

$$\|f\|^2 = (f, f).$$

Tenemos las siguientes propiedades:

i. Teorema de Pitágoras. Si $(f, g) = 0$, $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.
ii. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. $|(f, g)| \leq \|f\|\|g\|$.

Note que (ii) implica la desigualdad triangular. Consideraremos las funciones:

$$e_n(\theta) = e^{in\theta} \quad n \in \mathbb{Z},$$

que constituyen una familia ortonormal en $\Re$. De esta manera, podemos reescribir

$$a_n = (f, e_n), \quad S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n.$$

Observe también que $(f - S_N(f), e_n) = a_n - a_n = 0$, para todo n. Por tanto, $f - S_N(f)$ es ortogonal a $\sum_{|n|\leq N} b_n e_n$, para todo $b_n \in \mathbb{C}$. En particular, si tomamos $a_n = b_n$ y aplicamos el Teorema de Pitágoras, vemos que

$$\|f\|^2 = \left\| f - \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n \right\|^2 + \left\| \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n \right\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2. \tag{1}$$

Note que hemos usado la relación $\|a_n e_n\|^2 = (a_n e_n, a_n e_n) = a_n \overline{a_n} = |a_n|^2$. Esta fórmula nos permite demostrar el siguiente resultado.

Lema 1.1 (De mejor aproximación). *Si $f \in \Re$ tiene coeficientes de Fourier a_n, entonces*

$$\|f - S_N(f)\| \leq \left\| f - \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \right\|, \qquad \text{para todo } c_n \in \mathbb{C}.$$

La igualdad se obtiene si y solo si $c_n = a_n$, para todo $|n| \leq N$.

Demostración. Escribamos $f - \sum_{|n|\leq N} c_n e_n = f - S_N(f) + \sum_{|n|\leq N} b_n e_n$, donde $b_n = a_n - c_n$. Como $f - S_N(f)$ es ortogonal a $\sum_{|n|\leq N} b_n e_n$, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras para obtener

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \right\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \left\| \sum_{n=-N}^{N} b_n e_n \right\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{n=-N}^{N} |b_n|^2 \geq \|f - S_N(f)\|^2.$$

Esto demuestra la desigualdad requerida. La igualdad se tiene si y solo si $b_n = 0$, esto es, $a_n = c_n$, para todo $|n| \leq N$. $\square$

Otra noción que será útil es la *convolución* entre f y g, dada por

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) g(x - y) dy.$$

Aunque esta operación es útil para expresar las sumas $S_N(f)$, nosotros la emplearemos a través de la *suma de Abel* de la serie de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ de funciones $f \in \Re$. Más precisamente, si $0 < r < 1$, esta suma se define por

$$A_r(f)(\theta) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} a_n e^{in\theta} = (f * P_r)(\theta), \quad \text{donde} \quad P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2},$$

denota el *núcleo de Poisson*. La familia de funciones $\{P_r\}_{0<r<1}$ satisface

I. $P_r(\theta) \geq 0$ y $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(x) dx = 1$ para todo $0 < r < 1$.
II. Para todo $\delta > 0$, $\int_{\delta \leq |x-\pi| \leq \pi} |P_r(x)| dx \to 0$ cuando $r \to 1^-$.

En este sentido nos referimos a estas funciones como una familia de *buenos núcleos*.

2. Convergencia en $\mathcal{L}^2$ y el teorema de Riemann-Lebesgue

En esta sección demostraremos el primer resultado de convergencia de la series de Fourier con la norma del espacio $\Re$.

Teorema 2.1. *Sea $f \in \Re$ y a_n su coeficiente n-ésimo de Fourier. Entonces:*

$$\lim_{N\to+\infty} \|f - S_N(f)\| = 0.$$

Demostración. La prueba se divide en dos pasos. Primero se demostrará para funciones continuas y luego para cualquier elemento de $\Re$. Para el primer paso requerimos del siguiente resultado fundamental.

Lema 2.2 (de aproximación de Weierstrass)**.** *Sea $f : I = [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ continua. Entonces, para todo $\epsilon > 0$, existe un polinomio trigonométrico $P(\theta) = \sum_{|m|\leq M} c_m e^{im\theta}$ tal que:*

$$\sup_{\theta\in I} |f(\theta) - P(\theta)| < \epsilon.$$

Para demostrar el teorema en este caso, sea $\epsilon > 0$ y f continua. El Lema 2.2 nos permite escoger $P(\theta)$ tal que $|f(\theta) - P(\theta)| < \epsilon^{1/2}$. Elevando al cuadrado e integrando en I, obtenemos que $\|f - P\| < \epsilon$. Finalmente, utilizando el Lema de mejor aproximación 1.1, concluimos que

$$\|f - S_N(f)\| < \epsilon, \quad \text{si } N \geq M,$$

donde M es el grado del polinomio P.

Para la segunda parte de la prueba, empleamos el siguiente lema técnico, ver [1].

Lema 2.3. *Si $f \in \Re$, existe una sucesión $\{f_k : I \to \mathbb{C}\}_{k\geq 1}$, de funciones continuas tales que:*

$$\sup_{\theta\in I} |f_k(\theta)| \leq \sup_{\theta\in I} |f(\theta)| = B, \quad \textit{para todo } \ k \geq 1,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - f_k(\theta)| d\theta = 0.$$

Para finalizar la prueba del Teorema 2.1, tome $\epsilon > 0$ y f_k tal que $\sup_{\theta\in I} |f_k(\theta)| \leq \sup_{\theta\in I} |f(\theta)| = B$ y $\int_0^{2\pi} |f(\theta) - f_k(\theta)| d\theta < \epsilon^2$. De esta forma

$$\begin{aligned}\|f - f_k\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - f_k(\theta)| \cdot |f(\theta) - f_k(\theta)| d\theta \\ &\leq \frac{2B}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)| d\theta \leq \epsilon^2 \frac{B}{\pi}.\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 2.2 a f_k obtenemos un polinomio trigonométrico P, tal que $\|f_k - P\| < \epsilon$. Así $\|f - P\| < (1 + \sqrt{B/\pi})\epsilon = \epsilon'$. Aplicando el Lema 1.1 a f, concluimos que $\|f - S_N(f)\| \leq \|f - P\| < \epsilon'$, completando la demostración. □

Teorema 2.4 (Riemann-Lebesgue)**.** *Si $f \in \Re$, entonces $\widehat{f}(n) \to 0$, si $|n| \to +\infty$.*

Demostración. Gracias al Teorema 2.1, podemos tomar $N \to +\infty$ en (1) y así obtenemos la ***Identidad de Parseval***

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \|f\|^2 = \sum_{n=\infty}^{\infty} |a_n|^2.$$

En particular, $a_n \to 0$ si $n \to +\infty$, porque esta serie converge. □

Una de las aplicaciones interesantes de la identidad de Parseval es el cálculo de series notables. Incluimos el siguiente ejemplo clásico.

Ejemplo 2.1. El problema de Basilea planteaba calcular el valor exacto de la suma

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots .$$

Este fue hallado por L. Euler en 1745, quien llegó a su valor empleando series divergentes.

Considere la función periódica

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{si} \quad |\theta| \le \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < |\theta| < \pi, \end{cases}$$

Un cálculo directo muestra que $\hat{f}(0) = 0$ y $\hat{f}(n) = \frac{1}{2n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $n \neq 0$. Así $\hat{f}(-n) = \hat{f}(n)$, $\hat{f}(2m) = 0$ y $\hat{f}(2m+1) = \frac{(-1)^m}{2(2m+1)}$, $m \ge 0$. Aplicando la identidad de Parseval vemos que

$$2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4(2m+1)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi^2}{16} dt = \frac{\pi^2}{16}, \qquad \text{y así} \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Por tanto, $\zeta(2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) + \frac{\pi^2}{8}$ y $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,644934067$.

3. Convergencia de la serie de Fourier de una función diferenciable

En esta sección recordamos la demostración dada por Paul R. Chernoff en [2].

Teorema 3.1 (Chernoff)**.** *Sea $f \in \Re$, diferenciable en $x_0 \in [0, 2\pi]$. Entonces su serie de Fourier converge a $f(x_0)$.*

Podemos suponer que $x_0 = 0$ y $f(x_0) = 0$. Si $g(x) = \frac{f(x)}{e^{ix}-1}$, como $f'(0)$ existe, entonces g es acotada en $x = 0$ y por tanto $g \in \Re$. Considerando los coeficientes de Fourier de f obtenemos:

$$\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k-1) - \widehat{g}(k).$$

Si sumamos desde $k = -m$ hasta $k = n$ y notando que se obtiene una suma telescopica, entonces:

$$S_{m,n}(0) = \sum_{k=-m}^{n} \widehat{f}(k) = \widehat{g}(-m-1) - \widehat{g}(n).$$

Finalmente, por el Teorema de Riemann-Lebesgue concluimos que $S_{m,n}(0) \to 0 = f(x_0)$, si $m, n \to +\infty$.

4. Una función continua con serie de Fourier divergente

Concluimos esta nota con una forma de construir dicha función, con serie de Fourier divergente en un punto, digamos $\theta_0 = 0$. Partimos de la función impar $f(\theta) = i(\pi - \theta)$, $0 \le \theta \le \pi$ cuya serie de Fourier es

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{in\theta}}{n}.$$

Romperemos la simetría de esta expresión, consideremos la suma $\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{in\theta}/n$. La función que ella define no es la serie de Fourier de ninguna función $g \in \Re$. En efecto, en caso de que lo fuera, utilizando su suma de Abel y las propiedades del núcleo de Poisson, llegamos a:

$$|A_r(g)(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(\theta)|P_r(\theta)d\theta \leq \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |g(\theta)|.$$

Como $|A_r(g)(0)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} = -\ln(1-r) \to +\infty$ cuando $r \to 1^-$, dicha g no podría ser acotada. Así llegamos a una contradicción.

Consideremos ahora las sumas parciales

$$f_N(\theta) = \sum_{1\leq|n|\leq N} \frac{e^{in\theta}}{n}, \qquad \widetilde{f}_N(\theta) = \sum_{n=-N}^{-1} \frac{e^{in\theta}}{n}.$$

Es un hecho conocido que $|\widetilde{f}_N(0)| = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \ln(N)$. Veamos también que $f_N(\theta)$ es uniformemente acotada en N y θ. Esto es consecuencia del siguiente lema.

Lema 4.1. *Suponga que la suma de Abel $A_r = \sum_{n=1}^{\infty} r^n c_n$ de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es acotada cuando $r \to 1^-$. Si $c_n = O(1/n)$, entonces la sucesión $\{S_N = \sum_{n=1}^{N} c_n\}_{N\geq 1}$ es acotada.*

En efecto, podemos aplicarlo a cada $f_N(\theta)$ porque $c_n(\theta) = \frac{e^{in\theta}}{n} - \frac{e^{-in\theta}}{n} = O(1/n)$ y $|A_r(f)(\theta)| \leq \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |f(\theta)|$ es acotada. Así f_N es uniformemente acotada en N y θ como requeríamos.

La idea para construir la función continua con serie de Fourier divergente es considerar la serie de funciones

$$F(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_{N_k}(\theta), \qquad \text{donde} \qquad P_N(\theta) = e^{2iN\theta} f_N(\theta),$$

es este polinomio trigonométrico de grado $3N$ y los N_k, α_k son valores numéricos adecuados. En efecto, si tomamos los valores

$$N_k = 3^{2^k}, \qquad \alpha_k = \frac{1}{k^2},$$

es claro que $N_{k+1} > 3N_k$ y $\alpha_k \ln(N_k) \to +\infty$ cuando $k \to +\infty$. Como la serie $\sum_k \alpha_k$ converge y los $P_N(\theta)$ son uniformemente acotados, entonces F define una función continua, gracias al M-test de Weierstrass.

Para calcular la serie de Fourier de F, pongamos $\widetilde{P}_N(\theta) = e^{2iN\theta}\widetilde{f}_N(\theta)$. En estos términos, obtenemos las siguientes relaciones:

$$S_M(P_N) = \begin{cases} P_N & \text{si} \quad M \geq 3N, \\ \widetilde{P}_N & \text{si} \quad M = 2N, \\ 0 & \text{si} \quad M \leq N. \end{cases}$$

De esta manera, $S_{2N_m}(F) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k S_{2N_m}(P_{N_k}) = \alpha_m \widetilde{P}_{N_m} + \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k S_{2N_m}(P_{N_k})$, y por tanto

$$|S_{2N_m}(F)(0)| \geq c\alpha_m \ln(N_m) + O(1) \to +\infty \quad \text{cuando} \quad m \to +\infty.$$

En conclusión, la serie de Fourier de F diverge en $\theta = 0$.

Referencias

[1] Stein, E. M., and Shakarchi, R. (2003). Fourier Analysis: An Introduction. Princeton University Press.
[2] Chernoff, P. R. (1980). Pointwise Convergence of Fourier Series. American Mathematical Monthly, 87(5), 399. https://doi.org/10.2307/2321220.
[3] Rudin, W. (1976). Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill Publishing Company.