# Ideales de Stanley-Reisner: Una relación entre el álgebra y la combinatoria


por

Catalina Quincosis Martínez

Bajo la supervisión de

M.C. Pedro Ramírez-Moreno
Estudiante de Doctorado
CIMAT - Guanajuato



Santiago de Cali, Valle del Cauca, Colombia, 2023

# 1. Introducción

La teoría de Stanley-Reisner nace en las décadas de 1960 y 1970, cuando se introduce por primera vez el concepto de complejo simplicial en la teoría de la topología algebraica, esto con el fin de definir grupos de homología en espacios que permitan encontrar invariantes topológicas entre ellos [6]. La correspondencia entre estos objetos e ideales libres de cuadradados ha contribuido a numerosos progresos tanto en la combinatoria como en el álgebra conmutativa; algunas de los más conocidos son: el criterio de Reisner para anillos Cohen-Macaulay, la fórmula de Hochster, la prueba de la conjetura de la cota superior para esferas simpliciales, entre otras. Algunas de estas aplicaciones involucran la dualidad de Alexander, los número de Betti y los primos asociados como se muestra en [3].

Los ideales de Stanley-Reisner son objetos algebraicos que tienen relaciones con la teoría de grafos y la combinatoria algebraica. Estos ideales se construyen a partir de complejos simpliciales, que son estructuras combinatorias formadas por conjuntos finitos de vértices y sus subconjuntos. El estudio de los ideales de Stanley-Reisner permite entender mejor la estructura combinatoria de su complejo simplicial asociado y, en particular, proporciona información valiosa sobre las propiedades algebraicas del complejo. Otras aplicaciones que podemos resaltar de los ideales de Stanley-Reisner son la resolución de sistemas de ecuaciones polinómicas, la descripción de variedades algebraicas, la clasificación de grafos y la comprensión de propiedades de la topología algebraica de espacios como esferas y toros. En general, el estudio de estos ideales es importante porque proporciona una conexión profunda entre la geometría combinatoria y el álgebra.

Un resultado fundamental que relaciona estos ideales con los complejos simpliciales es el hecho de que hay una biyección entre ellos, lo cual nos proporciona un diccionario que nos permitirá movernos entre las herramientas que afloran en cada rama, álgebra y combinatoria, para entender problemas y propiedades de una a través de la otra además de sus numerosas vertientes [5].

# 2. Preliminares

En esta sección definiremos conceptos básicos empezando por el área combinatoria. Algunas definiciones son tomadas de [2] y [4].

**Definición 2.1.** Un **complejo simplicial** $\Delta$ de un conjunto de puntos $[n] = \{1, ..., n\}$ es una colección de subconjuntos llamados caras o simplejos que satisfacen las siguiente propiedades:

- Si $\sigma \in \Delta$ es una cara y $\tau \subseteq \sigma$ entonces $\tau \in \Delta$.
- La intersección de dos simplejos en $\Delta$ es una cara de ambos simplejos (o puede ser vacío).

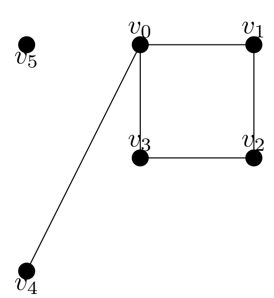


Figura 1: Ejemplo de complejo simplicial.

Un simplejo $\Delta$ es una generalización de la noción de un triángulo para dimensiones arbitrarias. Por ejemplo:

- Un simplejo 0-dimensional, $\Delta_0$ es un punto.
- Un simplejo 1-dimensional, $\Delta_1$ es un segmento de línea.
- Un simplejo 2-dimensional, $\Delta_2$ es un triángulo.
- Un simplejo 3-dimensional, $\Delta_3$ es un tetraedro. Ver Figura 2.

Formalmente, tenemos lo siguiente.

**Definición 2.2.** Decimos que un simplejo $k$-dimensional es un politopo $k$-dimensional, en otras palabras, es la envolvente conexa de sus $k+1$ vértices.

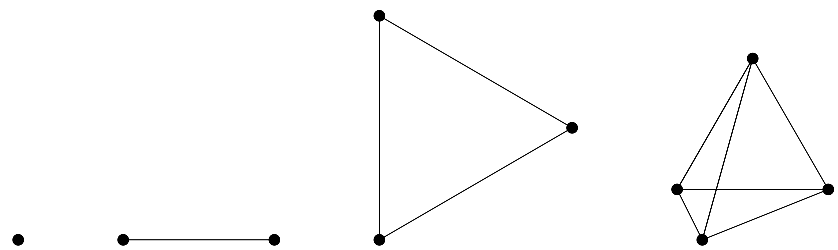

Figura 2: Simplejos hasta la dimensión 3.

Ahora se presentan los conceptos algebraicos a usar:

**Definición 2.3.** Un anillo $R$ es un conjunto con dos operaciones binarias $+$ y $\times$ (llamadas adición y multiplicación) que satisfacen los siguientes axiomas:

(i) $(R,+)$ es un grupo abeliano.

(ii) $\times$ es asociativo: $(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$ para todo $a,\ b,\ c\in R$.

(iii) Se tienen las leyes distributivas en $R$: para todo $a,\ b,\ c\in R$.

$$(a+b)\times c = (a\times c)+(b\times c) \text{ y } a\times(b+c) = (a\times b)+(a\times c).$$

El anillo $R$ es conmutativo si la multiplicación es conmutativa. Se dice que el anillo $R$ tiene una identidad (o contiene un 1) si existe un elemento $1\in R$ con

$$1\times a = a\times 1 = a \text{ para todo } a\in R$$

A partir de aquí consideraremos todo anillo como un anillo conmutativo con unidad.

**Definición 2.4.** Sea $R$ un anillo, sea $I$ un subconjunto de $R$ y sea $r\in R$.

(1) $rI := \{ra \mid a\in I\}$.

(2) Un subconjunto $I$ de $R$ es un ideal de $R$ si:

  (i) $I$ es un subgrupo con la operación $+$.

  (ii) $I$ es cerrado bajo la multiplicación con elementos de $R$, esto es, $rI\subseteq I$ para todo $r\in R$.

**Definición 2.5.** Sea $A$ cualquier subconjunto de $R$. Denote como $I=\langle A\rangle$ el ideal más pequeño de $R$ que contiene a $A$, llamado el ideal generado por $A$.

**Definición 2.6.** Decimos que un ideal $I$ de $R$ es finitamente generado, si existe algún $m\in\mathbb{N}$ tal que $I=\langle a_1,a_2,...,a_m\rangle$ para ciertos $a_i\in R$.

**Definición 2.7.** Un anillo conmutativo $R$ es Noetheriano si cada ideal de $R$ es finitamente generado.

**Teorema 2.8.** *Sea $R$ un anillo conmutativo con unidad, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

*(1) $R$ es Noetheriano.*

*(2) Cada cadena ascendente de ideales se estabiliza.*

*(3) Cualquier colección de ideales de $R$ tiene elementos maximales.*

*Demostración.* (1) $\rightarrow$ (2) Asuma que $R$ es Noetheriano y sean $I_1, ..., I_m$ ideales de $R$. Luego escoja un ideal cualquiera $I_1$, si $I_1$ es maximal (2) se tiene, entonces asuma que $I_1$ no es maximal. Entonces existe otro ideal $I_2$ tal que $I_1 \subset I_2$. Si $I_2$ es maximal, (2) se tiene, entonces debemos asumir que existe un $I_3$ maximal tal que $I_2 \subset I_3$. Siguiendo con este procedimiento podemos notar que si la proposición (2) falla, podemos seguir usando el axioma de elección, obteniendo así una cadena infinita y estrictamente creciente de los ideales de $R$ con lo cual se contradice el supuesto.

(2) $\rightarrow$ (3) Para demostrar esto, consideremos una cadena ascendente de ideales en $R$:

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$$

Dado que $R$ es noetheriano, sabemos que toda cadena ascendente de ideales se estabiliza. Entonces, existe un $n$ tal que $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \ldots$. Es decir, la cadena se estabiliza en el ideal $I_n$.

Ahora, supongamos que tenemos una colección de ideales $\mathcal{C}$ en $R$. Si $\mathcal{C}$ es vacía, entonces no hay nada que probar. De lo contrario, podemos construir una cadena ascendente de ideales en $\mathcal{C}$ de la siguiente manera:

$$J_1 \subseteq J_1 \cup \{I\} \subseteq J_2 \subseteq J_2 \cup \{I\} \subseteq \cdots$$

donde $J_1$ es cualquier elemento en $\mathcal{C}$, y $J_{i+1}$ es cualquier elemento en $\mathcal{C}$ que es un elemento maximal del conjunto $J_i \cup \{I\}$. Dado que $R$ es noetheriano, sabemos que esta cadena ascendente de ideales en $\mathcal{C}$ se estabiliza en un ideal $J_n$. Pero si $J_n$ no fuera un elemento maximal en $\mathcal{C}$, entonces existiría algún otro ideal $J$ en $\mathcal{C}$ tal que $J_n \subsetneq J$. Sin embargo, esto contradice la construcción de la cadena ascendente, ya que en cada paso estamos escogiendo un elemento maximal en el conjunto $J_i \cup I$. Por lo tanto, $J_n$ debe ser un elemento maximal en $\mathcal{C}$.

(3) $\rightarrow$ (1) Actuando por contradicción supongamos que $R$ no es noetheriano, es decir, existe una cadena ascendente infinita de ideales

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$$

Como $R$ no es noetheriano, la colección de todos los ideales de $R$ no tiene elementos maximales, ya que cualquier ideal propio puede ser extendido a un ideal propio más grande. Pero esto contradice la hipótesis de que cualquier colección de ideales de $R$ tiene elementos maximales, por lo que concluimos que $R$ debe ser noetheriano.

$\square$

**Definición 2.9.** Un campo es un conjunto $F$ junto con dos operaciones binarias + y $\times$ tales que ambas $(F, +)$ y $(F^* := F \setminus \{0\}, \times)$ son grupos abelianos y se tiene la siguiente ley distributiva:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \text{ para todo } a, b, c \in F.$$

Sea $K$ un campo y $S = K[x_1, ..., x_n]$ un anillo de polinomios en $n$ variables sobre $K$. Sea $\mathbb{R}^n$ el conjunto de todos los vectores $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ donde cada $a_i \geq 0$ y $\mathbb{Z}^n_+ = \mathbb{R}^n_+ \cap \mathbb{Z}^n$. Cualquier producto $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ con $a_i \in \mathbb{N}$ se le denomima **monomio**. Si $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ es un monomio, entonces escribimos $u = \mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ con $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n_+$. Por lo tanto, los monomios en $S$ tienen una correspondencia biyectiva con los puntos de la malla en $\mathbb{R}^n_+$ y tenemos

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}}\mathbf{x}^{\mathbf{b}} = \mathbf{x}^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$$

El conjunto $\text{Mon}(S)$ de monomios de $S$ es una $K$-base de $S$. En otras palabras, cualquier polinomio $f \in S$ es una combinación $K$-lineal única de monomios:

$$f = \sum_{u \in \text{Mon}(S)} a_u u \text{ con } a_u \in K.$$

Decimos que el conjunto

$$\text{supp}(f) = \{u \in \text{Mon}(S) : \ a_u \neq 0\}$$

es llamado el soporte de $f$.

**Definición 2.10.** Un ideal $I \subset S$ es un ideal monomial si es generado por monomios.

**Lema 2.11.** *Todo ideal monomial tiene un único conjunto minimal de monomios generadores y dicho conjunto es finito.*

*Demostración.* Primero probaremos que los conjuntos generadores son finitos. Para esto usaremos el hecho de que el anillo de polinomios $R = K[x_1, ..., x_n]$ es Noetheriano, y por el teorema de la base de Hilbert todo ideal $I \in R$ es finitamente generado.

Ahora note que todo ideal monomial tiene al menos un conjunto generador. Para mostrar que todo ideal monomial tiene un único conjunto minimal de monomios generadores, probaremos que cualesquiera dos conjuntos minimales de generadores de $I$ deben ser los mismos. Suponga que $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ y $H = \{h_1, \dots, h_m\}$ son dos conjuntos minimales de monomios generadores de $I$. Queremos ver que $G = H$.

Dado que $G$ genera a $I$, tenemos que $h_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} g_j$ para algunos coeficientes $a_{ij}$ en el anillo de polinomios $R$. Similarmente, como $H$ genera a $I$, tenemos que $g_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} h_i$ para algunos coeficientes $b_{ij}$ en $R$. Dicho de otra forma, si $g_i \in G$ para algún $i \in \{1, ..., k\}$, entonces $g_i \in \langle H \rangle$ de manera que existe un $j \in \{1, ..., m\}$ tal que $h_i \mid g_i$. Por otro lado, si consideramos cualquier monomio $h_j \in H$ con $j \in [m]$ vemos que $h_j \in \langle G \rangle$, es decir, existe un $s \in \{1, ..., k\}$ tal que $g_s \mid h_j$.

Como $g_s \mid h_j$ y $h_j \mid g_i$ entonces $g_s \mid g_i$, pero como $G$ es un conjunto minimal de generadores, $g_s = g_i$. Con esto mente, observe que si $h_j \mid g_i$ y $g_i \mid h_j$ implica que $h_j = g_i$ y por ende $g_i \in H$. Obteniendo la contenencia $G \subseteq H$, además, con argumento análogo se obtiene $H \subseteq G$ concluyendo así que los conjuntos minimales de generadores son iguales.

□

**Definición 2.12.** Un monomio $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ es libre de cuadrados si cada coordenada de $\mathbf{a}$ es 0 o 1. Un ideal es libre de cuadrados si es generado por monomios libres de cuadrados.

**Definición 2.13.** El ideal de **Stanley-Reisner** de un complejo simplicial $\Delta$ es el ideal libre de cuadrados

$$I_\Delta = \langle \mathbf{x}^\tau | \ \tau \notin \Delta \rangle$$

generado por monomios que representan las no-caras $\tau$ de $\Delta$. El anillo de **Stanley-Reisner** de $\Delta$ es el anillo cociente $S/I_\Delta$.

Existen dos formas de representar un ideal monomial libre de cuadrados: ya sea por sus generadores o como la intersección de ideales monomiales primos. Estos últimos estan generados por subconjuntos de $\{x_1, ..., x_n\}$. Para su notación, escribimos

$$\mathfrak{m}^\tau = \langle x_i \mid i \in \tau \rangle$$

para el ideal monomial primo correspondiente a $\tau$. Frecuentemente, $\tau$ será el complemento $\bar{\sigma} = [n] \smallsetminus \sigma$ de algún simplejo $\sigma$.

## 3. Biyección

**Teorema 3.1.** *La correspondencia $\Delta \to I_\Delta$ constituye una biyección entre los complejos simpliciales definidos en el conjunto de vértices $[n]$ y los ideales monomiales libres de cuadrados en $R = K[x_1,...,x_n]$. Además,*

$$I_\Delta = \bigcap_{\sigma\in\Delta} \mathfrak{m}^{\bar{\sigma}}$$

*Demostración.* Para verificar la inyectividad, considere los complejos simpliciales $\Delta$ y $\Delta'$ tales que $I_\Delta = I_{\Delta'}$. Supongamos que existe un $\sigma$ tal que $\sigma \notin \Delta$, entonces $x^\sigma \in I_\Delta = I_{\Delta'}$, por lo tanto, $x^\sigma \in \langle x^\tau \mid \tau \notin \Delta' \rangle$. Como $I_{\Delta'}$ es un ideal monomial y $x^\sigma$ es monomio, existe al menos un generador de $I_{\Delta'}$ que divide a $x^\sigma$, esto es, $\exists \tau \notin \Delta'$ tal que $x^\tau | \, x^\sigma$. De manera que $\tau \subseteq \sigma$. Por otro lado, suponga que $\sigma \in \Delta'$, entonces $\tau \in \Delta'$, contradicción.

De este modo, $\sigma \notin \Delta$ si y solo si $\sigma \notin \Delta'$ con lo que concluimos que $\Delta = \Delta'$.

Para la sobreyectividad, considere el ideal monomial libre de cuadrados $I$, luego definimos el conjunto $\Delta := \{\sigma \in [n] : x^\sigma \notin I\}$. Queremos ver que el ideal definido por $I_\Delta = I$. En principio note que $\Delta$ es un complejo simplicial: Sea $\sigma \in \Delta$ y $\tau \subseteq \sigma$, veamos que $\tau \in \Delta$. Actuando por contradicción, suponga que $\tau \notin \Delta$ entonces $x^\tau \in I$. Como $\tau \subseteq \sigma$ se sigue que $x^\tau | \, x^\sigma$ y por tanto $x^\sigma \in I$. Ahora considere el ideal

$$\begin{aligned} I_\Delta &= \langle x^\sigma : \sigma \notin \Delta \rangle \\ &= \langle x^\sigma : \sigma \notin \{\sigma \in [n] : x^\sigma \notin I\} \rangle \\ &= \langle x^\sigma : x^\sigma \in I \rangle \\ &= I. \end{aligned}$$

Para demostrar que $I_\Delta = \bigcap_{\sigma\in\Delta} \mathfrak{m}^{\bar{\sigma}}$, veamos que se cumple la doble contenencia:

($\subseteq$) $I_\Delta \subseteq \mathfrak{m}^{\bar{\sigma}}$ para todo $\sigma \in \Delta$. Defínase $I_\Delta = \langle x^\tau \mid \tau \notin \Delta \rangle$ y tomemos un monoio cualquiera $x^\tau \in I_\Delta$ para ver que $x^\tau \in \mathfrak{m}^{\bar{\sigma}}$. Esto es equivalente a decir que $([n] \setminus \sigma) \cap \tau \neq \emptyset$. Actuando por contradicción, asuma que $([n] \setminus \sigma) \cap \tau = \emptyset$, es decir, $\tau \subseteq [n] \setminus ([n] \setminus \sigma) = \sigma$, como $\sigma \in \Delta$, entonces $\tau \in \Delta$, encontrando una contradicción a la definición de $I_\Delta$.

($\supseteq$) $\mathfrak{m}^{\bar{\sigma}}$ es monomial, entonces $\bigcap_{\sigma\in\Delta} \mathfrak{m}^{\bar{\sigma}}$ es monomial.

Sea $x^\alpha$ un generador monomial de $\bigcap_{\sigma\in\Delta} \mathfrak{m}^{\bar{\sigma}}$, luego $x^\alpha \in \mathfrak{m}^{\bar{\sigma}}$ para todo $\sigma \in \Delta$, de aquí que existe un $j \in [n] \setminus \sigma$ tal que $x_j \mid x^\alpha$. Ahora considere $\alpha' = \operatorname{supp}(x^\alpha)$, note que $\alpha' \subseteq [n]$ por lo tanto $\alpha'$ no es cara de $\Delta$, luego $x^{\alpha'} \in I_\Delta$, como $x^{\alpha'} \mid x^\alpha$ esto implica que $x^\alpha \in I_\Delta$, concluyendo así que $\bigcap_{\sigma\in\Delta} \mathfrak{m}^{\bar{\sigma}} \subseteq I_\Delta$.

□

## 4. Bases de Gröebner para ideales de Stanley-Reisner

Dado un ideal $I \in S$ y un polinomio $f \in S$, existe un problema fundamental que implica decidir ¿Cuándo el polinomio $f \in I$, dicho problema es conocido como *El problema de membresía del ideal* [1]. Las bases de Gröebner son una herramienta fundamental para resolver este problema, ya que proporcionan algoritmos para la membresía del ideal.

Examinemos el algoritmo de menbresía de un ideal en la familia de los ideales monovariables. Considere el anillo de polinomios $S = K[x]$. Si $\deg(f)$ denota el grado de un polinomio $f \in S$, entonces $f$ tiene la forma

$$f = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0$$

Donde $\deg(f) = n$, $c_n \neq 0$ y todos los $c_i \in K$.

**Teorema 4.1.** *Todo ideal de $K[x]$ es principal. Un ideal distinto de cero $I \in K[x]$ es generado por algún polinomio no nulo de menor grado.*

*Demostración.* Sea $f$ un polnomio no nulo con el menor grado en $I$, note que $\langle f \rangle \subseteq I$. Basta con probar que si $g \in I$ entonces $g \in \langle f \rangle$, o equivalentemente, que $f$ divide a $g$. Como $\deg(g) \geq \deg(f)$ podemos dividir a $g$ por $f$ para obtener polinomios $q$ y $r$ tales que $g = qf + r$ con $\deg(r) < \deg(f)$. Si $r = 0$ entonces $g \in \langle f \rangle$, ya que de otra forma tenemos lo siguiente: $qf \in I$ y por lo tanto $g - qf \in I$. Como $f$ es un polinomio de menor grado en $I$, entonces $deg(g - qf) \geq deg(f)$. Pero $g - qf = r$, luego $deg(r) \geq deg(f)$, lo cual contradice $deg(r) < deg(f)$. Por lo tanto, la única posibilidad es $r = 0$. □

Ahora podemos preguntarnos qué pasa con un ideal generado por tres o más polinomios. ¿Cómo sería el algoritmo de membresía de estos ideales? ¿Cómo encontramos un generador en este caso? La idea es extender la definición de m.c.d. para más de dos polinomios.

**Definición 4.2.** El m.c.d. de los polinomios $f_1, f_2, ..., f_s \in S$ es un polinomio $h$ tal que:

(1) $h$ divide a $f_1, ..., f_s$.

(2) Si $p$ es un polinomio que divide a $f_1, ..., f_s$, entonces $p|\ h$.

**Teorema 4.3.** *(1) El m.c.d. de $f_1, ..., f_s$ existe y es único.*

*(2) El ideal $\langle f_1, ..., f_s \rangle$ es generado por m.c.d$(f_1, ..., f_s)$.*

*(3) Si $s \geq 3$ entonces el m.c.d$(f_1, ..., f_s) = m.c.d.(f_1, m.c.d(f_2, ..., f_s))$.*

**Definición 4.4.** Sea $A$ un conjunto no vacío. Un buen orden sobre $A$ es un orden total sobre $A$ tal que cada subconjunto no vacío de $A$ tiene elemento mínimo (o más pequeño), esto es, para cada subconjunto no vacío $B \subseteq A$ existe un $s \in B$ tal que $s \leq b$, para todo $b \in B$.

**Definición 4.5.** Un orden monomial es un buen orden $\geq$ sobre un conjunto de monomios que satisfacen $mm_1 \geq mm_2$ siempre que $m_1 \geq m_2$ para los monomios $m, m_1, m_2$. Equivanlentemente, un orden monomial debe ser especificado por un buen orden en las $n$-uplas $\alpha = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}$ de monomios multigraduados $Ax_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ que satisfacen $\alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$ si $\alpha \geq \beta$.

**Definición 4.6.** Fije un orden monomial en el anillo de polinomios $S$.

(1) El término principal de un polinomio no nulo $f \in S$, denotado por $LT(f)$, por sus siglas en inglés *Leading term*, es el término monomial de máximo orden en $f$ y el término principal de $f = 0$ es 0.

(2) Si $I$ es un ideal en $S$, el ideal de términos principales, denotado por $LT(I)$, es el ideal generado por todos los términos principales de todos los elementos en el ideal, esto es, $LT(I) = \langle LT(f) \mid f \in I \rangle$.

**Ejemplo 4.7.** Si $f = 2x^3 - 5x + 3$, entonces $LT(f) = 2x^3$. Note también que si $f$ y $g$ son polinomios no nulos, entonces

$$\deg(f) \leq \deg(g) \Longleftrightarrow LT(f) \text{ divide } LT(g)$$

En el caso de $S = K[x]$, los términos principales también son usados en el algoritmo de la división para reducir un polinomio $g$ módulo otro polinomio $f$ para así obtener un único residuo $r$, además, este residuo es 0 si y solo sí $g$ está contenido en el ideal $\langle f \rangle$.

**Proposición 4.8.** *Sea $I \subseteq S$ un ideal distinto de $\{0\}$.*

*(1) $\langle LT(I) \rangle$ es un ideal monomial.*

*(2) Existen $g_1, ..., g_t \in I$ tales que $\langle LT(g_1), ..., LT(g_t) \rangle$.*

**Teorema 4.9** (Teorema de la base de Hilbert)**.** *Si $R$ es un anillo Noetheriano, entonces el anillo de polinomios $R[x]$ también lo es.*

*Demostración.* Sea $R$ un anillo Noetheriano e $I$ un ideal cualquiera de $R[x]$. Para probar que $R[x]$ es noetheriano tenemos que probar que $I$ es finitamente generado. Si $I = \{0\}$ se tiene de inmediato, entonces asuma que $I \neq \{0\}$. Denote como $LC(I)$ el conjunto de coeficientes principales de todos los elementos no nulos en el ideal $I$. Entonces tenemos que $LC(I)$ es un ideal de $R$ y como $R$ es noetheriano se tiene que $LC(I)$ es finitamente generado. Luego, $I$ tiene un ideal de términos principales $\langle LT(I)\rangle$. Por el resultado anterior, existen polinomios $f_1, ..., f_t \in I$ tales que $\langle LT(I)\rangle = \langle LT(f_1), ..., LT(f_t)\rangle$. Afirmamos que el ideal $I$ es generado por estos polinomios.

En efecto, sea $J$ un ideal de $R[x]$ generado por los polinomios $f_1, ..., f_t$, claramente $J \subseteq I$. Entonces basta probar que $I \subseteq J$ para obtener la igualdad. Con esto en mente, considere $g \in I$ como cualquier polinomo no nulo. Si aplicamos el algoritmo de la división obtenemos una expresión de la forma.

$$g = q_1 f_1 + \cdots + q_t f_t + r$$

Donde ningún término de $r$ es divisible por $LT(f_1), ..., LT(f_t)$. Aseguramos que $r = 0$. Para ver esto note que

$$r = g - q_1 f_1 - \cdots - q_t f_t \in I$$

Si $r \neq 0$, entonces $LT(r) \in \langle LT(I)\rangle = \langle LT(f_1), ..., LT(f_t)\rangle$, entonces $LT(r)$ es divisible por algún $LT(f_i)$, pero eso contradice la definición de residuo y consecuentemente $r = 0$. Por lo tanto,

$$g = q_1 f_1 + \cdots + q_t f_t + 0 \in \langle f_1, ..., f_t\rangle$$

Lo cual muestra que $I \subseteq \langle f_1, ..., f_t\rangle = J$ y esto completa la prueba. □

**Observación 4.10.** El teorema de base de Hilbert muestra cómo se pueden construir anillos noetherianos más grandes a partir de los existentes.

**Definición 4.11.** Una base de Gröebner para un ideal $I$ en el anillo de polinomios $S$ es un conjunto de generadores $\{g_1, ..., g_m\}$ para $I$ cuyos términos principales generan el ideal de todos los términos principales en $I$, esto es

$$I = \langle g_1, ..., g_m\rangle \text{ y } LT(I) = \langle LT(g_1), ..., LT(g_m)\rangle.$$

**Observación 4.12.** Para el caso de los ideales de Stanley-Reisner, definir una base de Gröebner es un caso trivial puesto que son ideales generados por monomios libres de cuadrados, entonces sus términos principales serán monomios de grado a lo más 1 y estos claramente generan el ideal de todos los ideales principales del ideal que se tome bajo cualquier orden monomial.

**Ejemplo 4.13.** Sea $K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ un anillo de polinomios sobre un campo $K$. Consideremos el complejo simplicial $\Delta$ dado por:

$$\Delta = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4\}\}$$

Entonces el ideal de Stanley-Reisner correspondiente a $\Delta$ es:

$$I_\Delta = \langle x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3x_4\rangle$$

Para encontrar una base de Gröebner de $I_\Delta$ con respecto a la ordenación lexicográfica es simplemente tomar la lista de monomios que definen al complejo simplicial correspondiente al ideal.

$$\{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3x_4\}.$$

## Referencias


[1] D. Cox, J. Little, D. O'Shea y M. Sweedler, «Ideals, varieties, and algorithms,» *American Mathematical Monthly*, vol. 101, n.º 6, págs. 582-586, 1994.

[2] D. S. Dummit y R. M. Foote, *Abstract algebra*. Wiley Hoboken, 2004, vol. 3.

[3] C. A. Francisco, J. Mermin y J. Schweig, «A survey of Stanley–Reisner theory,» en *Connections between algebra, combinatorics, and geometry*, Springer, 2014, págs. 209-234.

[4] J. Herzog, T. Hibi, J. Herzog y T. Hibi, *Monomial ideals*. Springer, 2011.

[5] J. Huang, *0-Hecke algebra actions on flags, polynomials, and Stanley-Reisner rings*. University of Minnesota, 2013.

[6] J. R. Munkres, *Elements of algebraic topology*. CRC press, 2018.