Introducción a la Dualidad de Poincaré

Licenciatura en Matemáticas

JHON ALEXANDER YAM BORGES

Tutor: Sebastian Jaramillo Diaz

Facultad de matemáticas
4 de mayo de 2023
Universidad Autónoma de Yucatán

Resumen

Este trabajo fue creado para el programa " Pares ordenados" que se asigna un mentor a un estudiante de pregrado para poder estudiar un tema de su interés. El tema de estudio en este caso es estudiar la dualidad de Poincaré, el cual nos habla que bajo ciertas condiciones existe una relación entre la homología y cohomología de variedades suaves cerradas diferenciables, orientables. Un concepto que requiere de conocimientos básicos de la topología algebraica, en particular es necesario poder esclarecer los siguientes conceptos:

- Grupo Fundamental
- Homología
- Cohomología
- Orientabilidad

No se profundizará en las propiedades de la Cohomología, sin embargo se dará una definición de ella para poder llegar a la Dualidad de Poincaré.

Introducción

Dualidad de Poincaré: Si M es una variedad suave cerrada, orientable en dimensión n. Entonces podemos encontrar su homología $H_i(M)$ y su cohomología $H^i(M)$, entonces existe un isomorfismo

$$H_i(M) \cong H^{n-i}(M)$$

La dualidad de Poincaré fue establecida por primera vez en 1893, sin embargo en ese tiempo aún no se había clasificado el concepto de cohomología. Poincaré intento probar el teorema usando la teoría topológica de la intersección. Fue hasta los años 30, cuando Eduard Cech y Hassler Whitney inventaron los productos cup y cap y formularon la dualidad de Poincaré en estos nuevos términos.

Grupo Fundamental

El grupo fundamental es una herramienta muy importante en la topología algebraica, ya que permite clasificar variedades topológicas según su conectividad y la presencia o ausencia de agujeros. Además, el grupo fundamental es un objeto de estudio importante en matemáticas puras y aplicadas, ya que tiene aplicaciones en campos tan diversos como la física teórica, la topología geométrica y la criptografía.

Homotopía

Las características interesantes de un espacio se revelan cuando se intenta deformar continuamente un camino en otro con los mismos puntos extremos.

El grupo fundamental está definido en términos de lazos y deformaciones de bucles. Aveces es mejor considerar una generalización de lo que son estas

Un camino en un espacio X significa un mapeo continuo $f : I \to X$ donde I es la intervalo unitario $[0, 1]$.

La idea de deformar continuamente un camino, manteniendo sus puntos finales se precisa mediante la siguiente definición.

Definición : Caminos

Una **homotopía** de caminos en X es un familia $f_t : I \to X, 0 \leq t \leq 1$ tal que:

1. Los puntos finales $f_t(0) = x_0$ y $f_t(1) = x_1$ son independientes de t
2. El mapeo asociado $F : I \times I \to X$ definido por $F(s,t) = f_t(s)$ es continuo

- **Proposición 1.2**. La relación de homotopía en caminos con extremos fijos en cualquier espacio es una relación de equivalencia .
- **Proposición 1.3** $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo respecto al producto $[f][g] = [f \cdot g]$

  Este grupo es llamado el grupo fundamental de X en el punto base x_0
- **Proposición 1.5**. El mapeo $\beta_h : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ es un isomorfismo

Definición : Espacio cubierta

Un espacio cubierta de X es un espacio $\tilde{X}$ con el mapeo $p : \tilde{X} \to X$ que satisfacen las siguientes condiciones:

- Cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta U en X tal que $p^{-1}(U)$ es la unión de conjuntos abiertos disjuntos en $\tilde{X}$ cada uno de los cuales es mapeado homeomorficamente sobre U por p

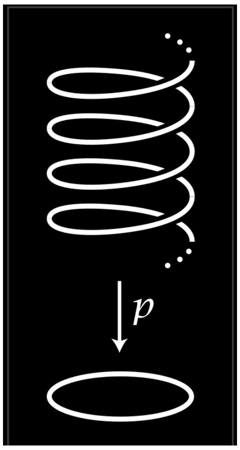


Figura 1: Espacio cubierta de S^1

Vam Kampen

Teorema : Vam Kampen's

Si $X = A \cup B$ con A y B conexo por caminos abiertos y cada uno contiene a $x_0 \in X$ y $A \cap B$ es conexa por caminos entonces:

$$\Phi : \pi_1(A) * \pi_1(B) \to \pi_1(X)$$

- **Proposición 1.26**

  1. Si Y se obtiene de X al adjuntar una 2-celda, entonces la inclusión $X \hookrightarrow Y$ induce un mapeo sobreyectivo $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y0)$ con kernel N.
  2. Si Y se obtiene de X al adjuntar $n-$ celdas para $n > 2$ fijo, entonces la inclusión $X \hookrightarrow Y$ induce un isomorphismo

  $$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

  3. Para un complejo X conexo por caminos, la inclusión de 2-skeleto $X^2 \hookrightarrow \lambda$ induce un isomorfismo

  $$pi_1\left(X^2, x_0\right) \cong \pi_1(\lambda, \lambda_0)$$

- **Corolario 1.27**. La superficie M_g no es homeomorfa, o incluso homotopicamente equivalente a M_h si $g \neq h$

Homología

Sabemos que $\pi_1\left(S^2\right) = \pi_1\left(S^3\right) \cong 0$ pero $S^2 \ncong S^3$ ya que la dimensión es diferente

Complejo de Cadenas

$$\cdots \overset{d_{n+2}}{\to} V_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} V_n \overset{d_n}{\to} V_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \cdots$$

que cumplen $\operatorname{Im}(d_{n+1}) \subset \operatorname{Ker}(d_n) \to d_n \circ d_{n+1} = 0$

decimos que es exacta si $\operatorname{Im}(d_{n+1}) = \operatorname{Ker}(d_n)$. Entonces, definimos el n-ésimo grupo de homología

$$H_n = \frac{\operatorname{Ker}(d_n)}{\operatorname{Im}(d_{n+1})}$$

$\Delta_n(X) =$ grupo libre con base los n-simplejos e_α^n de X

Entonces un elemento en $\Delta_n(X)$ es de la forma

$$\sum_\alpha m_\alpha e_\alpha^n \sim \sum_\alpha m_\alpha \sigma_n^\alpha : \Delta^n \to X$$

Homomorfismo de frontera

$$\begin{aligned} \partial_n \quad &: \quad \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X) \\ &\sigma_n^\alpha \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \sigma_n^\alpha \Big|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]} : \Delta^{n-1} \to X \end{aligned}$$

$e_n^\alpha = \mathrm{Im}\left(\sigma_n^\alpha\right)$ donde $\sigma_n^\alpha : \Delta^n \to X$

$$\sigma_n^\alpha|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]} \qquad \text{es un (n-1)-simplejo}$$

$$\cdots \to \Delta_n(X) \overset{\partial_n}{\to} \Delta_{n-1}(X) \overset{\partial_{n-1}}{\to} \Delta_{n-2}(X) \to \cdots$$

observación

$$\mathrm{Im}\left(\partial_n\right) \subset \mathrm{Ker}\left(\partial_{n-1}\right) \leftrightarrow \partial_{n-1} \circ \partial n = 0$$

- **Proposición 2.6.** Si $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$ con X_α conexo por caminos entonces

$$H_n(X) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$$

- **Proposición 2.7** Si X es no vacío, conexo por caminos entonces $H_0(X) = \mathbb{Z}$
  $H_0(X)$ detecta el número de componentes conexas
- **Proposición 2.8.** Homología de un punto

$$H_i(\{*\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

Homología reducida

$$\tilde{H}$$

$$\cdots C_n(X) \overset{\partial_n}{\to} C_{n-1}(X) \to \cdots \to C_2(X) \overset{\partial_2}{\to} C_1(X) \overset{\partial_1}{\to} C_0(X) \overset{\epsilon}{\to} \mathbb{Z}$$

$$\epsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$$

$$\sum_i n_i \sigma_i^0 \mapsto \sum_i n_i$$

podemos verificar que $\epsilon \circ \partial_1 = 0$

$$: C_1(X) \overset{\partial_1}{\to} C_0(X) \overset{\epsilon}{\to} \mathbb{Z}$$

$$a \mapsto w - v \mapsto 1 + (-1) = 0$$

$$H_i(X) = H_i(X) \qquad \text{Para } i \geq 1$$

$$H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$$

Invarianza de Homotopía

Si $f, g : X \to Y$ son homotópicos, esto es,

$f_* g_* : H_i(X) \to H_i(Y)$, entonces $f_* = g_*$
Funtor es un "mapeo" entre categorías

$$H_* : \text{ TOP } \to \text{ Grupos abelianos}$$

$$X \mapsto H_*(X)$$

$$f : X \to Y \mapsto f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$$

- **corolario 2.11**. Si $f : X \to Y$ es una equivalencia homotopica, entonces $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)\, \forall n$ es un isomorfismo

Teorema : 2.13

Si X es un espacio y A es un subespacio cerrado (no vacío) que es un retracto de deformación de alguna vecindad de X, entonces existe una secuencia exacta larga en homología

$$\cdots \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$
$$\cdots \hookrightarrow \tilde{H}_0(X/A) \to 0$$

donde $i : A \hookrightarrow X$ y $j : X \to X/A$

importante: Lema 2.13 Nos habla de la relación entre las anteriores homologías y **no** es lo que esperamos

$$\tilde{H}_i(X/A) \cong \tilde{H}_i(X) / \tilde{H}_i(A) \to \text{ No es cierto}$$

- **corolario 2.14.** $\hat{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ y $\hat{H}_i(S^n) = 0$ para $i \neq n$

Grupos relativos de homología

$$\tilde{H}_i(X, A)$$
$$\tilde{H}_i(X/A)$$

Teorema : Excisión

Dado $Z \subset A \subset X$ tal que $\overline{z} \subset \text{ int } (A)$.
Entonces la inclusión $(X - z, A - z) \hookrightarrow H_n(X, A)\, \forall n$

- **Proposición 2.22.** Para buenos pares el mapeo cociente

$$q : (X, A) \to (X/A, A/A)$$

induce el isomorfismo

$$q_* : H_n(X, A) \to H_n(X/A, A/A) \approx H_n(X/A)$$

Grupos de homología local

Dado X y $x \in X$ se define el grupo de homología local de X en $\{x\}$ por el grupo $H_n(X, X - \{x\})$
Consideremos $\mathbb{R}^m$, y también consideremos $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto, $x \in U$

$$H_i(U, U - \{x\}) \cong H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{x\}) \cong H_i\left(\mathbb{R}^m, S^{m-1}\right) \cong \tilde{H}_i(S^m) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = m \\ 0 & i \neq m \end{cases}$$

$$R^m - \{x\} \simeq S^{m-1}$$

Orientación

En está sección vamos a hablar acerca de como definir la orientación de una n-variedad, primero vamos a llamar una n-variedad a un espacio que localmente es homeomorfo a R^n

Intuitivamente podemos pensar a a la orientabilidad como algo que se debe preservar bajo rotaciones y que se invierte bajo reflecciones, como por ejemplo el sentido de las manecillas del reloj en R^2 y la regla de la mano derecha en R^3, esta es la propiedad que caracteriza a una orientación, otra manera de pensarlo, de manera más intuitiva es pensar en una hormiga, con un vector sobre ella, apuntando hacia afuera, si una variedad es orientable entonces no importa el lugar en la que se mueva la hormiga, el vector sobre ella siempre apuntará hacia afuera. Podemos aproximar nuestra idea de orientabilidad con la siguiente definición.

Definimos una orientación en un espacio vectorial V

$$B = \{v_1, \ldots, v_n\} \qquad \text{una base para V}$$

$$\begin{array}{cccccc} A: & V & \to & V & \to & \text{define una matriz} \\ & v_i & \mapsto & v_{i'} & & A = [a_{ij}] \end{array}$$

esto define dos clases de equivalencia de transformaciones lineales que tienen determinante positivo, y las que tienen determinante negativo

Dos bases B y B' están relacionadas si la matriz de cambio de base tiene determinante positivo.

Decimos que un variedad suave es orientable si $\forall p \in M$, el plano tangente T_pM es orientable en este sentido

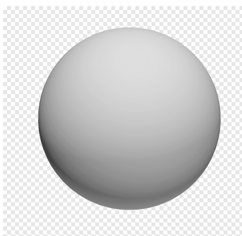


Figura 2: Una esfera es orientable

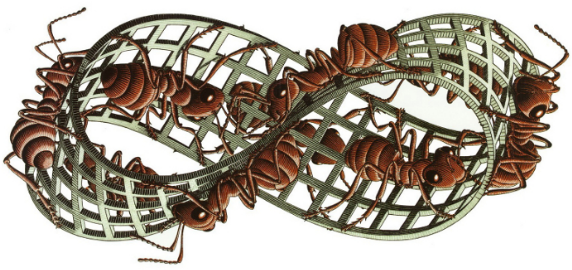


Figura 3: Banda de Möbius no es orientable

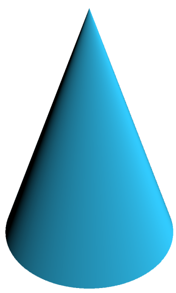
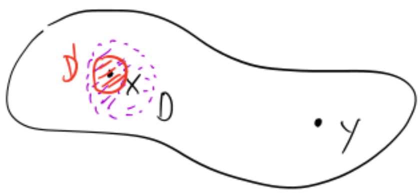


Figura 4: ¿Es orientable?

Definición : **Homología local**

$x \in X$, la homología locas se define como

$$H_i\left(X, X-\{x\}\right) \cong H_i\left(D, D-\{x\}\right) \cong H_i\left(D', D'-\{x\}\right)$$



Si consideramos ahora un variedad M de dimensión n, esto es, localmente es $\mathbb{R}^n$
Orientación Local de M en un punto x es una elección de un generador de $H_n\left(M, M-x\right)$

$$H_n\left(M, M-x\right) \cong H_n\left(U, U-x\right) \cong H_n\left(R^n, \mathbb{R}^n-x\right)$$

$$\cong \tilde{H}_{n-1}\left(S^{n-1}\right) \cong \mathbb{Z}$$

Definición : Orientación

Una orientación de un n-variedad M es una función

$$\begin{aligned} M &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto \mu_x \end{aligned}$$

que satisface la consistencia local para cada $x \in M$ existe una vecindad en M que contiene una bola B alrededor de x tal que todas las orientaciones locales μ_y con $y \in B$ son las imágenes de $\mu_b \in H_n(M|B)$ es el generador bajo mapeos

$$H_n(M|B) \to H_n(M|y)$$

$$\mu_b \mapsto \mu_y$$

Dualidad de Poincaré

Lema : 3.2.7

Sea M una variedad de dimensión n y sea $A \subset M$ un subconjunto compacto, entonces:

1. Si $x \mapsto \alpha_x$ es una sección del espacio cubierta $\mu_R \to M$ entonces existe una única clase $\alpha_A \in H_n(M|A, R)$ cuya imagen en $H_n(M|x, R)$ es $\alpha_x \forall x \in A$
2. $H_i(M|A, R) = 0 \qquad \forall i > n$

- **corolario 3.28** Si M es una n-variedad cerrada y conexa entonces el subgrupo de torsión de $H_{n-1}(M, \mathbb{Z})$ es trivial si M es orientable y $\mathbb{Z}_2$ si M no es orientable

$$H_{n-1}(M, \mathbb{Z}) \cong Z^v \oplus \text{ torsión}$$

$$\cong \begin{cases} \mathbb{Z}^v & \text{si es orientable} \\ \mathbb{Z}^v \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{si no es orientable} \end{cases}$$

Teorema : 3.30

Si M es R-orientable El mapeo es un isomorfismo

$$D : H^k(M, R) \to H_{n-k}(M, R)$$

$$\alpha \mapsto [M] \cap \alpha$$

$$[M] \in H_n(M, R)$$

Para definir la dualidad de Poincaré necesitamos definir:

- Orientabilidad
- Cohomología
- Cap product

$$0 \to C_n(X) \overset{\partial_n}{\to} C_{n-1}(X) \to \cdots \to C_2(X) \overset{\partial_2}{\to} C_1(X) \overset{\partial_1}{\to} C_0(X) \to 0$$

$$\updownarrow$$

$$0 \to C_n(X,\mathbb{Z}) \overset{\partial_n}{\to} C_{n-1}(X,\mathbb{Z}) \to \cdots \to C_2(X,\mathbb{Z}) \overset{\partial_2}{\to} C_1(X,\mathbb{Z}) \overset{\partial_1}{\to} C_0(X,\mathbb{Z}) \to 0$$

$$\updownarrow$$

$$0 \to C_n(X,R) \overset{\partial_n}{\to} C_{n-1}(X,R) \to \cdots \to C_2(X,R) \overset{\partial_2}{\to} C_1(X,R) \overset{\partial_1}{\to} C_0(X,R) \to 0$$

Esto define $H_*(X,R)$
Si aplicamos $\mathrm{Hom}_R(-,R)$

$$C^*(X,R) = \mathrm{Hom}_R(C_n(X,R),R) = \{\varphi : C_n(X,R) \to R\}$$
$$\sigma\Delta^n \to X \mapsto \varphi \cdot \sigma \in R$$

es el grupo de cocadenas

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \overset{\partial_n}{\to} & C_{n-1}(X) \\ & \downarrow & \mathrm{Hom}_R(-,R) \\ C^n(X) & \overset{\delta_n}{\leftarrow} & C^{n-1}(X) \\ \varphi_n : C_n(X) \to R & & \varphi_{n-1} : C_{n-1}(X) \to R \end{array}$$

obteniendo así un complejo de cocadenas

$$0 \leftarrow C^n(X) \overset{\delta_n}{\leftarrow} C^{n-1}(X) \leftarrow \cdots \leftarrow C^2(X) \overset{\delta_2}{\leftarrow} C^1(X) \overset{\delta_1}{\leftarrow} C^0(X) \leftarrow 0$$

La cohomología $H*(X) = \frac{\mathrm{Ker}(\delta_*)}{\mathrm{Im}(\delta_{*-1})}$
En cohomología tenemos resultados análogos a la homología tal como

- MV
- Secuencia exacta larga

Cup product

$$\varphi \in C^k(X,R) \text{ y } \psi \in C^l(X,R)$$

$$(\varphi \cup \psi) \in C^{k+l}(X,R)$$

$$(\varphi \cup \psi) : C_{k+l}(X) \to R$$

podemos definir el cup product en cohomología

$$H^k(X) \times H^l(X) \overset{\cup}{\to} H^{k+l}(X)$$

$$\left(H^*(X) = \bigoplus_{k\geq 0} H^*(X), \cup \right) \quad \text{es un anillo graduado}$$

Producto Cap : $\cap$

$$\cap : C_k(X,R) \times C^l(X,R) \to C_{k-l}(X,R)$$
$$(\sigma,\varphi) \mapsto \sigma \circ \varphi$$

$$\sigma : \Delta^k \to X \qquad\qquad \varphi : C_l(X,R) \to R$$

$$\sigma \cap \varphi = \varphi\left(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_l]} \right) \cdot \sigma|_{[v_l,\ldots,v_k]} \qquad k \geq l$$

Esto nos define

$$H_k(X,R) \times H^l(X,R) \overset{\cup}{\to} H_{k-l}(X,R)$$

Si $k = n$

$$\begin{array}{rcl} H_n(X) \times H^l(X) & \overset{\cup}{\to} & H_{n-l}(X) \\ ([M],\alpha) & \mapsto & [M] \cup \alpha \\ & \downarrow & \\ & \text{no degenerado} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \Leftrightarrow H^l(X) & \overset{\cong}{\to} & H_{n-l}(X) \\ \alpha & \mapsto & [M] \cup \alpha \end{array}$$

Dualidad de Poincaré