Teoría de la medida

Jhon Freddy Pérez Remolina

La teoría de la medida sobre $\mathbb{R}^n$ es un área de las matemáticas que estudia cómo medir conjuntos de números reales en n-dimensiones, como el volumen de una bola en $\mathbb{R}^3$ o el área de un rectángulo en $\mathbb{R}^2$. La teoría de la medida es una herramienta fundamental en muchas áreas de las matemáticas, incluyendo análisis funcional, ecuaciones diferenciales parciales y probabilidad.

En este texto nos centraremos en el Teorema de convergencia dominada, el cual es de gran importancia dentro de la teoría de la medida e integración. Veremos un ejemplo y algunos resultados fundamentales que hacen uso de este teorema.

1. Medida exterior y la medida de Lebesgue

En la teoría de la medida, se define una función llamada "medida"que asigna un número no negativo a ciertos conjuntos en $\mathbb{R}^n$, y que satisface ciertas propiedades. Existen varias medidas importantes en $\mathbb{R}^n$, como la medida de Lebesgue, que es la más comúnmente usada. La medida de Lebesgue mide la "tamaño"de un conjunto en $\mathbb{R}^n$ en términos de su volumen o área. La medida de Lebesgue es muy útil en el análisis funcional, ya que permite definir integrales de funciones continuas y medibles.

Para introducir la medida de Lebesgue es necesario definir antes el concepto de *medida exterior*. La medida exterior es una herramienta importante en la teoría de la medida que nos permite medir conjuntos que no son necesariamente medibles en el sentido clásico.

La idea fundamental detrás de la medida exterior es que podemos aproximar la medida de un conjunto E en $\mathbb{R}^n$ por medio de cubrimientos, es decir, colecciones de conjuntos que cubren completamente E.

Definición 1.1. Sea E un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^d$, la *medida exterior de E* está dada por

$$m_*(E) = \operatorname{ínf} \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|,$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las cubiertas numerables $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ por cubos cerrados. Recordemos que un cubo cerrado Q subconjunto de $\mathbb{R}^d$ es de la forma $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, donde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, d$.

Es importante destacar que la medida exterior puede asignar una medida finita o infinita a un conjunto en $\mathbb{R}^n$, y que no todos los conjuntos son medibles en el sentido clásico. Sin embargo, la medida exterior tiene algunas propiedades útiles, como la subaditividad y la invariancia bajo traslaciones y rotaciones, que nos permiten hacer cálculos con ella de manera efectiva.

Proposición 1.2. Listamos propiedades importantes acerca de la medida exterior.

1. Si $E_1 \subseteq E_2$, entonces $m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$.

2. Si $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ entonces $m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j)$.

3. Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$, entonces $m_*(E) = \inf m_*(O)$, donde el ínfimo es tomado sobre todos los abiertos que contienen a E.

4. Si $E = E_1 \cup E_2$ con $d(E_1, E_2) > 0$, entonces
$$m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2).$$

5. Si E es la unión de cubos casi disjuntos $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, entonces
$$m_*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|.$$

Observe que con la definición de medida exterior no es posible obtener que si $E = E_1 \cup E_2$ donde $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ entonces $m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$. Por lo tanto, definiremos la medida de Lebesgue como una medida que además satisface la aditividad contable.

Definición 1.3. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^d$ es *Lebesgue medible* o simplemente *medible*, si para todo $\epsilon > 0$ existe un abierto O con $E \subseteq O$ tal que
$$m_*(O - E) \leq \epsilon.$$
Si E es medible, definimos la *medida de Lebesgue* (o *medida*) de E por $m(E) = m_*(E)$.

Algunas de las siguientes propiedades de la medida de Lebuesgue se sigue de las propiedades de la medida exterior enunciadas en la proposición 1.2.

Proposición 1.4. Propiedades de la medida de Lebuesgue.

1. Cada abierto de $\mathbb{R}^d$ es medible.

2. Si $m_*(E) = 0$, entonces E es medible.

3. La unión contable de conjuntos medibles es medible.

4. Los conjuntos cerrados son medibles.

5. El complemento de un conjunto medible es medible

6. La intersección contable de conjuntos medibles es medible.

El siguiente resultado es una propiedad importante de la medida de Lebesgue comúnmente conocida como la aditividad de la medida.

Teorema 1.5. Si $E_1, E_2, \ldots$ son conjuntos disjuntos medibles y $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, entonces
$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

La noción de invarianza de la medida es bastante comprensible, ya que la medida de un conjunto debe permanecer constante independientemente de cómo se sitúe o se traslade en el espacio. Esto significa que si tomamos un cubo en $\mathbb{R}^3$, su medida será la misma aunque se gire o se mueva a otra posición, siempre que no cambie de forma. La invarianza de la medida de Lebesgue formaliza este entendimiento en el contexto de la teoría de la medida. De lo anterior, enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 1.6. Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, $h \in \mathbb{R}^d$ y $\delta > 0$. Defina los siguientes conjuntos

$$E_h = E + h = \{x + h \colon x \in E\} \quad \text{y} \quad \delta E = \{\delta x \colon x \in E\}.$$

Si E es medible, entonces E_h y δE son conjuntos medibles. Más aún, $m(E) = m(E_h)$ y $m(\delta E) = \delta^d m(E)$.

2. Existencia de un conjunto no medible

La teoría de la medida ofrece un medio preciso de medir conjuntos en espacios como $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, puede resultar inesperado descubrir que no todos los conjuntos son medibles según la teoría de la medida. El conjunto de Vitali es un ejemplo clásico de conjunto no mensurable en $\mathbb{R}$.

El conjunto de Vitali es una colección no mensurable de clases de equivalencia en $\mathbb{R}$ que vienen determinadas con una relación de equivalencia. Sean $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

No es dificil verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia. Considere $\{\mathcal{C}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ la colección de todas las clases de equivalencia. Ahora, por el axioma de elección escoja un único elemento x_α por cada clase de equivalencia. De este modo, el conjunto de Vitali se define como $\mathcal{N} = \{x_\alpha \colon \alpha \in I\}$.

Teorema 2.1. El conjunto $\mathcal{N}$ es no medible.

Demostración. Sea $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ una enumeración de todos todos los racionales en el intervalo $[-1, 1]$ y considere las siguientes translaciones

$$\mathcal{N}_k = \mathcal{N} + r_k$$

Entonces, tenemos que la colección $\{\mathcal{N}_k\}_k$ es disjunta dos a dos y además

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_k \subseteq [-1, 2].$$

Si suponemos que $\mathcal{N}$ es medible, entonces $\mathcal{N}_k$ es medible para cada $k \in \mathbb{N}$ por el teorema 1.6. Así, tenemos que

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathcal{N}_k) \leq 3$$

Dado que $\mathcal{N}_k$ es una translación de $\mathcal{N}$, nuevamente por el teorema 1.6 se tiene que $m(\mathcal{N}_k) = m(\mathcal{N})$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathcal{N}) \leq 3.$$

Lo cual es una contradicción, ya que no se puede tener que $m(\mathcal{N}) = 0$ ni $m(\mathcal{N}) > 0$. $\square$

3. Funciones medibles

En el análisis matemático, las funciones medibles son fundamentales porque nos permiten definir la integral de una función. De hecho, la familia de funciones medibles es la base sobre la cual se construye la teoría de la integración. Una propiedad importante de las funciones medibles es que siempre pueden ser integradas (aunque pueden dar infinito), lo que hace que esta clase de funciones sea extremadamente útil. La función característica que veremos a continuación es ejemplo de función medible que es muy utilizado en está teoría.

La función característica de un conjunto E está dada por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin E, \\ 1 & \text{si } x \in E \end{cases}$$

Seguidamente definiremos las *funciones salto*, que vienen dada por combinaciones de la función característica.

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{R_k}.$$

Donde a_k son constantes y cada R_k es un rectángulo. Para terminar con está notación introduciremos las *funciones simples* que están dada por

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}.$$

Donde cada E_k es un conjunto medible y a_k es constante.

Definición 3.1. Sea $f \colon E \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, donde E es un conjunto medible. Decimos que f es *medible* si para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in E \colon f(x) < a\} = \{f < a\}$$

es medible.

Antes de seguir con las propiedades básicas de las funciones medibles, observe que la definición puede ser cambiada a si el conjunto $\{f \leq a\}$ es medible. Más aún, puede ser cambiado a $\{f > a\}$ o $\{f \geq a\}$.

Proposición 3.2. Una función f que toma valores finitos y φ una función continua. Entonces:

1. f es medible si, y solo si, $f^{-1}(U)$ es medible para cada abierto U.

2. $\varphi \circ f$ es una función medible.

3. Suponga que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles, entonces las funciones

$$\sup_n f_n(x), \quad \inf_n f_n(x), \quad \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{y} \quad \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

son medibles.

4. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles y

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

entonces f es medible.

De la proposición anterior se sigue que cada función continua es medible.

Decimos que dos funciones f y g son iguales en *casi cualquier parte* (o *almost everywhere*) y escribimos $f(x) = g(x)$ a.e $x \in E$ si el conjunto $\{x \in E\colon f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida cero. Abreviaremos la notación diciendo solamente que $f = g$ a.e.

Proposición 3.3. Suponga que f es medible, y $f(x) = g(x)$ para a.e x. Entonces g es medible.

El siguiente resultado nos dice que es posible aproximar cualquier función medible mediante funciones simples.

Teorema 3.4. Suponga que f es medible sobre $\mathbb{R}^d$. Entonces existe una sucesión de funciones simples $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}^{\infty}$ que satisface

$$|\varphi_k(x)| \leq |\varphi_{k+1}(x)| \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \text{ para todo } x$$

Teorema de Egorov y Teorema de Lusin

En la teoría de la medida, los teoremas de Egorov y Lusin son herramientas fundamentales para estudiar la convergencia de funciones en espacios de medida.

El siguiente teorema, conocido generalmente como el teorema de Egorov, es de gran importancia ya que establece condiciones bajo las cuales una sucesión de funciones converge uniformemente a una función límite en un conjunto medible, esto es, cada sucesión convergente es casi una sucesión uniformemente convergentes. Además, este teorema es un paso clave en la demostración del teorema de convergencia dominada de Lebesgue, que es uno de los teoremas fundamentales de la teoría de la medida y la integración.

Teorema 3.5. *(Egorov)* Suponga que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles definidas sobre un conjunto medible E con $m(E) < \infty$, y asuma que $f_k \to f$ a.e sobre E. Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar un conjunto cerrado $A_\epsilon \subseteq E$ tal que $m(E - A_\epsilon) \leq \epsilon$ y $f_k \to f$ uniformemente sobre A_ϵ.

Presentaremos el siguiente teorema conocido como el teorema de Lusin. Este teorema es muy importante en la teoría de la integración ya que proporciona una herramienta útil para aproximar funciones medibles por funciones continuas. Más aún, esta nos dice que cada función medible se puede aproximar por funciones continuas, lo que permite estudiar con mayor facilidad sus propiedades analíticas en problemas de análisis.

Teorema 3.6. (*Lusin*) Suponga que f es una función medible y de valor finito sobre E con E de medida finita. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto cerrado F_ϵ con $F_\epsilon \subseteq E$ y $m(E - F_\epsilon) < \epsilon$ tal que $f|_{F_\epsilon}$ es continua.

4. Integración

La teoría de la integración en espacios de medida nos permite extender el concepto clásico de la integral de Riemann a un contexto más general, donde podemos integrar funciones más complicadas y en espacios más abstractos.

Antes de definir la medida es necesario introducir el concepto de soporte. El *soporte* de una función medible es el conjunto de puntos tales que la función no se anula

$$supp(f) = \{x\colon f(x) \neq 0\}$$

Decimos que f es soportada en E si $f(x) = 0$ siempre que $x \notin E$.

En la teoría de la medida, la integral se define en términos de la integral de funciones positivas, y luego se extiende a funciones más generales utilizando técnicas de aproximación.

Paso 1: Suponga que φ es una función simple y $\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$ es cualquier representación de φ, entonces

$$\int \varphi dm = \sum_{k=1}^{N} a_k m(E_k).$$

Paso 2: Sea f una función medible que es soportada sobre un conjunto de medida finita. Por el teorema 3.4 existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples que satisface: $|\varphi_n| \leq M$, cada φ_n es soportada en el soporte de f y $\varphi_n(x) \to f(x)$ para a.e x cuando $n \to \infty$. Para f definimos la integral de Lebesgue como

$$\int f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(x)dx,$$

Paso 3: Sea f una función medible no negativa (*posiblemente acotada*), entonces

$$\int f(x)dx = \sup_{0\leq g\leq f} \int g(x)dx,$$

donde el supremo es tomado sobre todas las funciones medibles tales que $0 \leq g \leq f$, y donde g es una función acotada y soportada sobre un conjunto de medida finita.

Paso 4: Sea f una función medible de valor real. Decimos que f es Lebesgue integrable si $|f|$ es integrable. La integral de Lebesgue de f está definida por

$$\int f = \int f^+ - \int f^-,$$

donde $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ y $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ las cuales ambas f^+ y f^- son no negativas y además $f^+ - f^- = f$.

El siguiente teorema se conoce como el teorema de convergencia acotada, el cual nos dice que el límite de una sucesión de funciones medibles acotadas es una función medible y acotada. Este teorema tiene consecuencias importantes, además, este será usado para probar el teorema de convergencia dominada.

Teorema 4.1. (*Teorema de convergencia acotada*) Suponga que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles tales que existe $M > 0$ con $|f_n(x)| \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos además que cada f_n es soportada en un conjunto E de medida finita y $f_n(x) \to f(x)$ a.e x. Entonces f es medible, acotada y soportada sobre E para a.e x y

$$\int f_n \to \int f \text{ cuando } n \to \infty.$$

El siguiente lema que presentaremos es conocido como el lema de Fatou, el cual establece una desigualdad para el límite inferior de la integral de una sucesión de funciones medibles no negativas.

Lema 4.2. (*Fatou*) Suponga que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles con $f_n \geq 0$. Si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para a.e x, entonces

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Demostración. Supongamos que $0 \leq g \leq f$ donde g es acotada y soportada sobre un conjunto E de medida finita. Si definimos $g_n(x) = \text{mín}(g(x), f_n(x))$, tenemos que g_n es medible, soportada en E y $g_n(x) \to g(x)$ a.e x, entonces por el teorema de convergencia acotada, tenemos que

$$\int g_n \to \int g$$

Ahora, por la construcción de g_n tenemos que $g_n \leq f_n$, entonces $\int g_n \leq \int f_n$ y por lo tanto,

$$\int g \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Dado que $\sup_{0 \leq g \leq f} g = f$, tenemos que

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

□

El siguiente resultado se conoce como el teorema de convergencia monótona, el cual es uno de los teoremas importantes acerca de la convergencia de las clases de funciones medibles no negativas.

Corolario 4.3. (*Teorema de convergencia monótona*) Suponga que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones no negativas tales que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para a.e x, para todo $n \geq 1$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para a.e x. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Demostración. Como $f_n \to f$ a.e x y además $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para a.e x, por el teorema de convergencia monótona para sucesiones en $\mathbb{R}$ se sigue que $f_n(x) \leq f(x)$ para a.e x. Luego, por la monotonicidad de la integral de Lebesgue, se sigue que $\int f_n \leq f$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f.$$

Ahora, por el lema de Fatou tenemos la otra desigualdad, es decir,

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Así, concluimos la prueba. □

5. Teorema de convergencia dominada

El teorema de convergencia dominada es un resultado clave en el estudio de la teoría de la medida y la integración. Afirma que, en determinadas condiciones, es posible cambiar el orden de toma de límites y realización de integrales cuando se trata de una serie de funciones medibles y acotadas. Este teorema es significativo, ya que permite demostrar la convergencia de las integrales construidas a partir de dicha sucesión.

Teorema 5.1. (*Teorema de convergencia dominada*) Suponga que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles tales que $f_n(x) \to f(x)$ a.e x, cuando $n \to \infty$. Si $|f_n(x)| \leq g(x)$, donde g es integrable, entonces

$$\int f_n \to \int f \text{ cuando } n \to \infty.$$

Antes de realizar el bosquejo de la demostración, enunciaremos un lema (sin demostración) que nos será de gran utilidad para hacer la prueba.

Lema 5.2. Suponga que $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es medible e integrable sobre $\mathbb{R}^d$. Entonces para cada $\epsilon > 0$:

(I) Existe un conjunto de medida finita B (*una bola, por ejemplo*) tal que

$$\int_{B^c} |f| < \epsilon.$$

(II) Existe un $\delta > 0$ tal que

$$\int_E |f| < \epsilon \text{ donde } m(E) < \delta.$$

Demostración. (*Teorema 5.1, Bosquejo*) Para cada $N \geq 0$ sea

$$E_N = \{x\colon |x| \leq N, g(x) \leq N\}.$$

Sea $\epsilon > 0$. Como g es integrable, por el lema 5.2 existe un N tal que $\int_{E_N^c} g < \epsilon$ (*puede que no sea exactamente un conjunto de la forma E_N, pero si se argumenta como en la prueba del lema 5.2 es posible encontrar dicho E_N*). Entonces las funciones $f_n \chi_{E_N}$ son acotadas (*por N*) y soportadas sobre un conjunto de medida finita (en específico E_N), entonces por el teorema de convergencia acotada, tenemos que

$$\int_{E_N} |f_n - f| < \epsilon, \text{ para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Por lo tanto, obtenemos la estimación

$$\begin{aligned} \int |f_n - f| &= \int_{E_N} |f_n - f| + \int_{E_N^c} |f_n - f| \\ &\leq \int_{E_N} |f_n - f| + 2\int_{E_N^c} g \\ &\leq \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon \end{aligned}$$

para todo n suficientemente grande. De lo anterior, se concluye el teorema. □

El siguiente ejemplo ilustra el uso del teorema de convergencia dominada.

Ejemplo 5.3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sigue

$$f_n(x) = \frac{n \sin x/n}{x(x^2+1)}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x) = \pi.$$

En efecto, primero note que cada f_n es medible y además, la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a $\frac{1}{1+x^2}$ para todo $x \neq 0$. Pues

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin x/n}{x/n}\right) \frac{1}{1+x^2}. \\
&= \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $g = \frac{1}{1+x^2}$ domina a f_n.

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &= \left|\frac{\sin x/n}{x/n} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right|. \\
&= \frac{|\sin x/n|}{|x/n|} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\
&\leq \frac{1}{1+x^2} = g(x) \quad \text{a.e } x.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, estamos en las hipótesis del teorema de convergencia dominada, así, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n \sin x/n}{x(x^2+1)} dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n \sin x/n}{x(x^2+1)} dx. \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx. \\
&= \tan^{-1}(x)|_{-\infty}^{\infty}. \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Algunas aplicaciones del teorema de convergencia dominada

El Teorema de convergencia dominada se encuentra en distintas partes del análisis real, por lo cual, hace parte de una herramienta importante dentro de está rama. Presentaremos algunas aplicaciones de este teorema dentro de la teoría de integración.

Antes de enunciar algunos resultados que hacen uso del teorema de convergencia dominada definiremos el espacio L^1.

Para cualquier función f sobre $\mathbb{R}^d$ definimos la *norma* de f como

$$||f|| = ||f||_{L^1} = ||f||_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx.$$

La colección de todas las funciones integrables con la norma de arriba es la definición del espacio $L^1(\mathbb{R}^d)$. Se puede probar que el espacio $L^1(\mathbb{R}^d)$ es métrico.

Ahora ya podremos enunciar resultados importantes que usan el teorema de convergencia dominada. Recordemos que un espacio es completo con su métrica, si cada sucesión de Cauchy es convergente.

Teorema 5.4. (*Riesz-Fischer*) El espacio vectorial L^1 es completo con su métrica.

El siguiente teorema nos dice que es posible aproximar cualquier función en L^1 por medio de funciones simples, salto o continuas.

Teorema 5.5. Las siguientes familias de funciones son densas en $L^1(\mathbb{R}^d)$.

(I) Las funciones simples.

(II) Las funciones salto.

(III) Las funciones continuas con soporte compacto.

Para terminar este texto, definiremos la transformada de Fourier y seguidamente presentaremos un resultado que se tiene con respecto a la transformada.

Definición 5.6. Sea f una función integrable, definimos la transformada de Fourier como:

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\zeta}dx.$$

Teorema 5.7. Suponga que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Entonces, $\hat{f}$ definida anteriormente es una función continua y acotada sobre $\mathbb{R}^d$.

Demostración. Primero veamos que $\hat{f}$ es acotada. Observe que $|f(x)e^{-2\pi i x\cdot\zeta}| = |f(x)|$. Así, como f es integrable, se tiene que $\hat{f(\zeta)} < \infty$ para cada ζ. Notemos que

$$|\hat{f}(\zeta)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\zeta}dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx.$$

Por lo tanto, $\sup_{\zeta\in\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\zeta)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx < \infty$. Ahora veamos que $\hat{f}$ es continua. Sea $\zeta \in \mathbb{R}^d$ y $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^d$ tal que $\zeta_n \to \zeta$ cuando $n \to \infty$. Dado que la función $\zeta \mapsto e^{-2\pi i x\cdot\zeta}$ es continua, tenemos que

$$f(x)e^{-2\pi i x\cdot\zeta_n} \to f(x)e^{-2\pi i x\cdot\zeta} \text{ cuando } n \to \infty,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^d$. Como $|f(x)e^{-2\pi i x\cdot\zeta_n}| \leq |f(x)|$ para cada $x \in \mathbb{R}^d$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Se sigue por el teorema de convergencia dominada que

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}(\zeta_n) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\zeta_n} \to \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\zeta} = \hat{f}(\zeta).$$

Así, $\hat{f}$ es continua en ζ. Pero como el ζ fue arbitrario, concluimos que $\hat{f}$ es continua en $\mathbb{R}^d$. □

Referencias

[1] Folland, G.B. (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2005). *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces.* Princeton University Press. https://doi.org/10.2307/j.ctvd58v18