# Projecto Final - Pares Ordenados

**Sistemas Dinámicos en Todas Partes**

Brayan Florez

Mayo del 2023

## 1. Motivación

Algo que tienen en común, el movimiento de los planetas, el crecimiento de una población y el comportamiento de los mercados es su constante evolución en el tiempo, esta característica es la esencia de un sistema dinámico. La mayoría de fenómenos que observamos en nuestro mundo pueden ser modelados y analizados como sistemas dinámicos, es por esto que el estudio de esta rama de las matemáticas es crucial, pues nos permite comprender y predecir el comportamiento de una amplia variedad de fenómenos.

## 2. Un poco de historia

### 2.1. Problema de los tres cuerpos

El problema de los tres cuerpos es un tema fundamental de la mecánica celeste que consiste en describir cómo se mueven y predecir la posición y velocidad de tres cuerpos celestes, dadas sus posiciones y velocidades iniciales. Isaac Newton lo planteó por primera vez en el siglo XVII y lo abordó mediante un riguroso análisis matemático que sentó las bases de la física moderna. Sin embargo, no pudo encontrar una solución exacta al problema.

En 1885, el rey Oscar II de Suecia estableció un premio para quien pudiera resolver el problema, lo que ayudó a popularizarlo en la comunidad científica. En 1889, el matemático francés Henri Poincaré escribió un artículo abordando el problema y propuso que algunos sistemas como el Sol, la Tierra y la Luna eran estables. Desafortunadamente, su solución inicial fue incorrecta, pero en una versión corregida presentó ideas innovadoras y revolucionarias que permitieron encontrar soluciones aproximadas. Demostró que el problema es especialmente difícil de resolver analíticamente y que no existe una solución matemática exacta que permita predecir el movimiento de manera precisa y completa. Las soluciones exactas al problema son inestables, y pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden llevar a trayectorias muy diferentes en el tiempo.

Gracias al trabajo de Poincaré y otros científicos, se logró una mejor comprensión del problema de los tres cuerpos. Aunque sigue siendo uno de los grandes desafíos de la física y la matemática moderna, su estudio ha llevado a importantes avances en campos como la teoría del caos.

## 3. Conceptos impotantes

*Iterar* una función significa evaluar la función una y otra vez utilizando la salida de la aplicación anterior como entrada para la siguiente.

Para una función $f$, $f^2(x)$ es la segunda iteración de $f$ es decir $f(f(x))$, $f^3(x)$ es la tercera iteración $f(f(f(x)))$, y en general $f^n(x)$ es la composición n-ésima de $f$ consigo mismo.

Apartir de la definición de iterar una función podemos decir que un *sistema dinámico* es una función cuyas posibles salidas también pueden ser entradas. Esto nos permite introducir repetidamente las salidas de la función de vuelta en ella, permitiendo un comportamiento evolutivo.

En la teoría de los sistemas dinámicos se estudia el comportamiento de las iteraciones de $f$ según los diferentes valores del punto inicial. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, definimos la *orbita* de $x_0$ bajo $f$ como la sucesión de puntos $(x_0,f(x_0),f^2(x_0),\ldots)$. El punto $x_0$ es llamado *semilla* de la orbita. Existen diferentes tipos de orbitas:

- Un *punto fijo* es un punto $x_0$ que satisface $f(x_0) = x_0$ y en general $f^n(x_0) = x_0$. La orbita del punto fijo es la sucesión constante $(x_0,x_0,x_0,\ldots)$.
- Un *punto periodico* es un punto $x_0$ que satisface $f^n(x_0) = x_0$ para algun $n > 0$ donde $n$ es llamado periodo de la orbita. La orbita del punto periodico o ciclo es la sucesión repetitiva de números $(x_0,f(x_0),\ldots,f^n - 1(x_0),x_0,f(x_0),\ldots,f^n - 1(x_0),\ldots)$
- Además de estas órbitas, en un sistema dinámico típico, muchas órbitas no son fijas o periódicas. Hay otras que pueden tender a un punto fijo o diverger al infinito.

Es de interés conocer el comportamiento de las órbitas de una función, saber si las órbitas tienden a un punto fijo, divergen hacia el infinito, son periódicas o si se ven atraídas o repelidas por algún conjunto. En caso de que exista atracción o repulsión, es importante identificar los puntos cuyas órbitas son atraídas o repelidas por dicho conjunto. Esto nos permite comprender mejor el sistema y determinar si se trata de un sistema dinámico no caótico o un sistema dinámico caótico.

Un *sistema dinámico no caótico* es aquel en el que las trayectorias de los puntos del sistema son predecibles y se mueven de manera estable y regular en el tiempo. En otras palabras, una pequeña perturbación en las condiciones iniciales del sistema no causa un gran cambio en su comportamiento a largo plazo. Los sistemas dinámicos no caóticos tienen una estructura estable y se pueden describir de manera precisa mediante ecuaciones matemáticas. Ejemplos comunes de sistemas dinámicos no caóticos son el movimiento armónico simple, el oscilador amortiguado y el péndulo simple.

Por otro lado, en los *sistemas dinámicos caóticos*, pequeñas perturbaciones en el estado inicial del sistema pueden generar grandes diferencias en el comportamiento futuro del sistema. Es decir, dos sistemas que comienzan con condiciones iniciales ligeramente diferentes pueden divergir exponencialmente con el tiempo, y en consecuencia, tener comportamientos muy diferentes. Esto se conoce como "sensibilidad a las condiciones inicialesz es una de las características fundamentales de los sistemas dinámicos caóticos. Por lo tanto, en estos sistemas es muy difícil predecir su comportamiento a largo plazo con alta precisión.

# 4. Ejemplos

## 4.1. Sistema dinámico no caótico

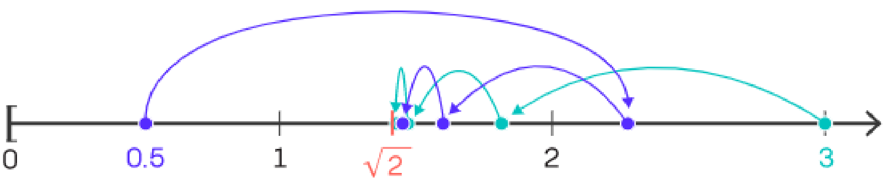
El *método de Newton*, también conocido como método de Newton-Raphson, es un algoritmo utilizado para encontrar soluciones numéricas de ecuaciones no lineales. El método consiste en aproximar la solución de una ecuación a través de una sucesión de aproximaciones cada vez más cercanas a la solución exacta.

Para aplicar el método de Newton para encontrar la raíz de una función $f(x)$ se sigue la siguiente fórmula iterativa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$$

donde $x_n$ es la aproximación de la raíz en la n-ésima iteración y $f'(x)$ es la derivada de $f(x)$ evaluada en $x_n$.

Supongamos que queremos calcular la raíz cuadrada de 2. Aplicando el método de Newton y empezando con una estimación inicial de $x = 3$, a medida de que vamos iterando la función $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ nos vamos acercando cada vez más al valor deseado. Como primera iteración obtenemos $F(3) = 1.8333333$, siendo más cercano al valor verdadero. Para acercarnos aún más, introducimos la salida en la función $F(1.8333333) = 1.4621212$. Haciendo esto tres veces más obtenemos 1.4142136.




*Samuel Velasco para Quanta Magazine*

La función $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ define un sistema dinámico en el que las órbitas de los puntos tienen un comportamiento predecible y estable. Como podemos evidenciar en la gráfica, las orbitas de 3 y $\frac{1}{2}$ se acercan al punto fijo atractor $\sqrt{2}$, punto fijo porque produce la órbita $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \ldots)$ y atractor porque, al igual que un agujero negro, atrae las órbitas de puntos cercanos.

No todos los sistemas dinámicos muestran un comportamiento tan simple y predecible. Un sistema dinámico puede tener órbitas que ciclan periódicamente a través de un conjunto finito de puntos, marchan hacia el infinito o no muestran aparentemente ningún orden.

## 5. Sistema dinámico caótico

La *aplicación logística* es una función que se puede iterar para modelar la dinámica de una población que se reproduce y compite por recursos limitados. Se puede escribir como:

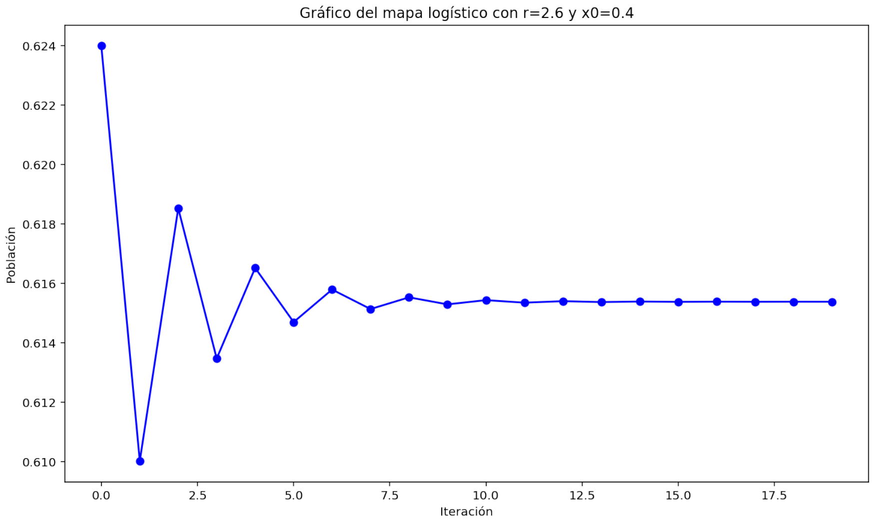
$$x_{n+1} = r\ x_n(1 - x_n)$$

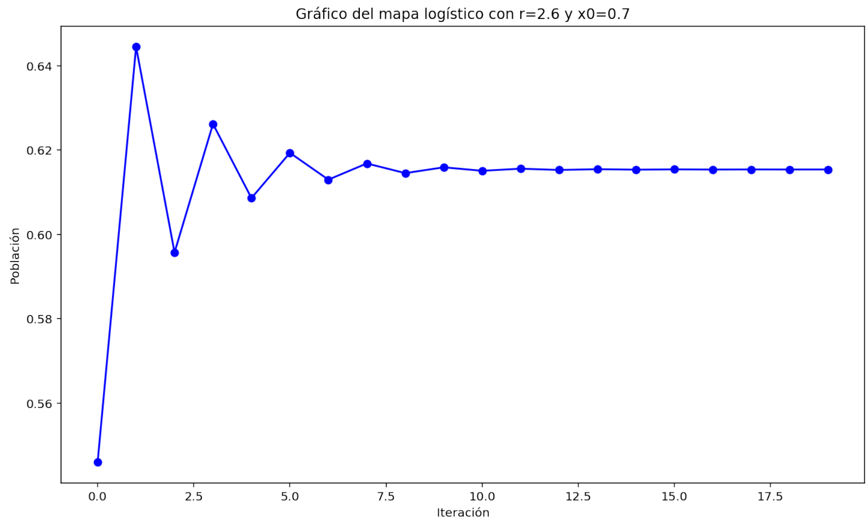
Donde: $x_n$ es la población en el instante n, $r$ es la tasa de crecimiento y $x_{n+1}$ es la población en el siguiente instante.

Esta función permite predecir la población futura de una especie dada. El comportamiento de la población dependerá de los valores de la tasa de crecimiento $r$ y del valor inicial de $x$. Para ciertos valores, la iteración de la función puede llevar a la estabilidad o la oscilación periódica de la población, mientras que para otros valores puede conducir a la divergencia y la inestabilidad.

Se implemento un código en Python de la función logística, que permite generar un gráfico de la evolución de la población a través de las iteraciones al variar los parámetros de tasa de crecimiento r y población inicial $x_0$. El código es el siguiente:

```
import matplotlib.pyplot as plt

# Función que calcula las iteraciones de la aplicación logística
def logistic_map(r, x, n):
    results = []
    for i in range(n):
        x = r * x * (1 - x)
        results.append(x)
    return results

# Parámetros de entrada
r = float(input("Ingrese la tasa de crecimiento (r): "))
x0 = float(input("Ingrese la población inicial (x0): "))
n = int(input("Ingrese el número de iteraciones (n): "))

# Generar la lista de valores
results = logistic_map(r, x0, n)

# Crear el gráfico
plt.plot(results,'o-',color='blue')
plt.title(f"Gráfico del mapa logístico con r={r} y x0={x0}")
plt.xlabel("Iteración")
plt.ylabel("Población")
plt.show()

# Imprimir tabla de valores
print("\nTabla de valores:")
print("Iteración\tValor")
for i, result in enumerate(results):
    print(f"{i+1}\t\t{result:.6f}")
```




Si se cambia la población inicial, se verá afectada la población solo durante los primeros años, para luego volver a la misma población de equilibrio 6.15.

Lo que nos interesa ahora es ver cómo varía la población de equilibrio dependiendo del valor de la tasa de crecimiento $r$.

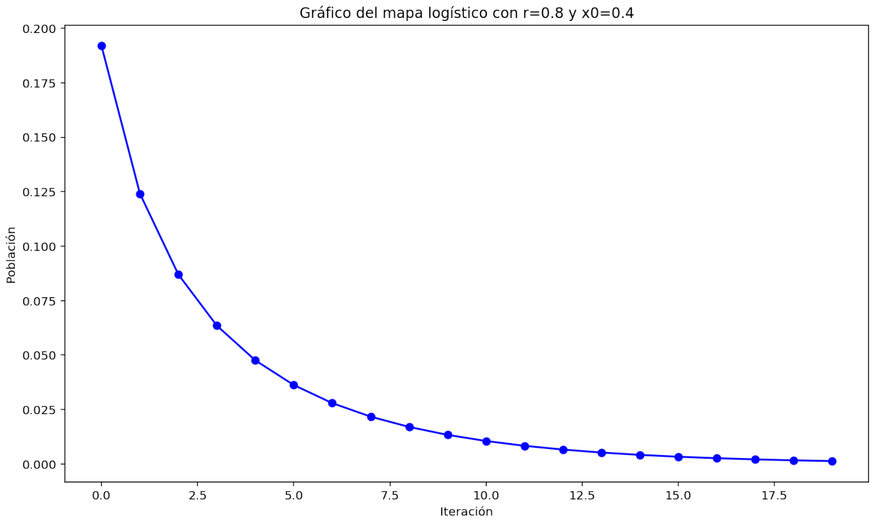


Gráfico del mapa logístico con r=0.8 y x0=0.4
Población
Iteración

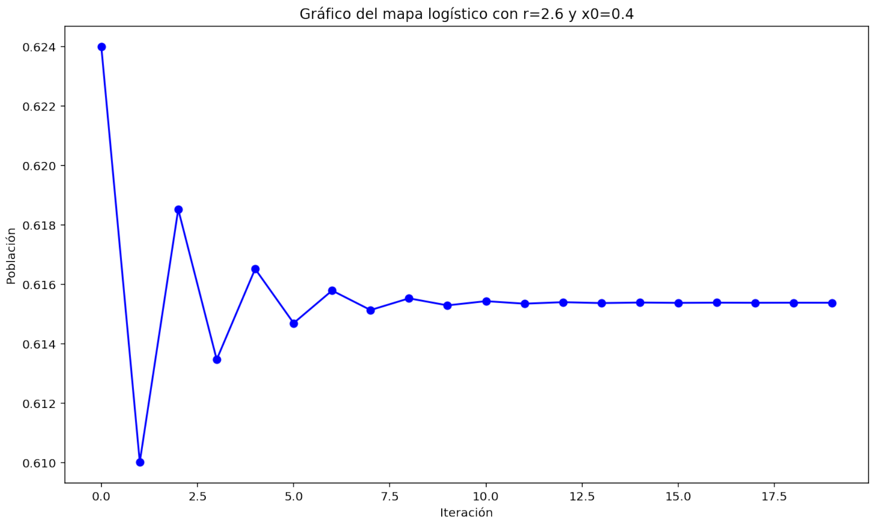



Gráfico del mapa logístico con r=2.6 y x0=0.4
Población
Iteración

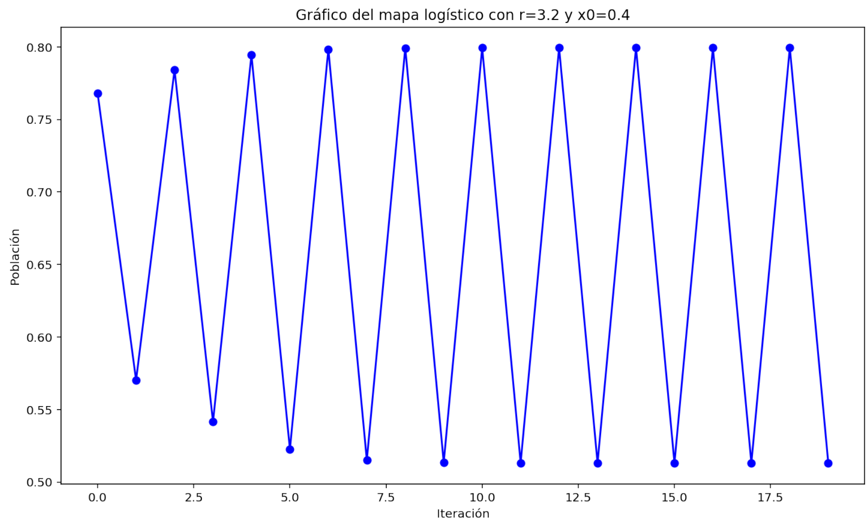



Gráfico del mapa logístico con r=3.2 y x0=0.4
Población
Iteración

Para valores bajos de $r$, las poblaciones siempre se extinguen y el valor de equilibrio es cero. Una vez que $r$ es mayor a 1, la población se estabiliza en un valor constante, y cuanto mayor sea $r$, mayor será la población de equilibrio. Algo interesante sucede cuando $r$ supera 3, ya que en este caso la función nunca se establece en un solo valor constante, en cambio, oscila de un lado a otro entre dos valores. A medida que $r$ continúa aumentando, la función oscila entre ciclos de 4, 8, 16, etc., antes de repetirse.

Pequeñas variaciones en la tasa de crecimiento pueden generar orbitas muy diferentes a largo plazo. En otras palabras, el comportamiento del sistema es sensible a las condiciones iniciales.

## 6. Conclusiones

Los sistemas dinámicos son una herramienta fundamental para entender y describir el comportamiento de muchos fenómenos naturales y artificiales. El estudio de estos sistemas nos permite comprender cómo evolucionan las variables a lo largo del tiempo y cómo se relacionan entre sí, lo que resulta de gran importancia en muchas áreas del conocimiento.

Existen dos tipos de sistemas dinámicos: los no caóticos, cuyas órbitas son predecibles y estables, y los caóticos, cuyas órbitas son impredecibles y altamente sensibles a las condiciones iniciales, su comportamiento a largo plazo puede ser entendido mediante la observación de patrones en su dinámica junto con herramientas matemáticas como el análisis de bifurcaciones y la teoría del caos.

## Referencias


[1] Robert Devaney A First Course in Chaotic Dynamical Systems 2nd Ed, 2020, CRC Press.

[2] David Richeson How We Can Make Sense of Chaos https://www.quantamagazine.org/how-mathematicians-make-sense-of-chaos-20220302/.

[3] Derek Muller This equation will change how you see the world https://www.youtube.com/watch?v=ovJcsL7vyrk.

[4] Fabio Pacucci Newton's three-body problem explained https://www.youtube.com/watch?v=D89ngRr4uZg.